

Die mathematische Theorie ballistischer Kurven

Eugen Willerding



www.eugen-willerring.de
©2023 Eugen Willerring
Cover: Reentry von Apollo 8, NASA

Die mathematische Theorie ballistischer Kurven

Eugen Willerding

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Grundgleichungen	11
3	Die Wurfparabel	16
4	Die klassische Ballistik mit Luftwiderstand	26
4.1	Integration der Grundgleichungen	26
4.2	Reihenlösungen nach Euler	38
4.3	Reihenentwicklung nach Tempelhof	41
4.4	Reihenlösungen nach der Zeit	44
4.5	Alternative Approximationen	47
4.6	Numerische Integration	55
4.7	Historische Zahlenbeispiele	58
4.8	Die échelle ballistique des J.H. Lambert	68
4.9	Störungstheorie der Wurfparabel	76
4.10	Asymptotische Zeitreihen	84
4.11	Der senkrechte Schuss	90
4.12	Senkrechter Schuss in große Höhen	97
4.13	Der freie Fall aus großer Höhe	99
4.14	Die Superkanone	103
4.15	Vorhalt beim Bombenabwurf	106
4.16	Über die Flugbahn von Golfbällen	109
4.17	Einfluss der Erdrotation	117
5	Hypersonische Ballistik	121
5.1	Die erweiterten Grundgleichungen	121
5.2	Das Allen - Eggers Modell	125
5.3	Ballistischer Wiedereintritt (Re-Entry) aus großen Höhen	133
5.4	Skip Re-Entry aus großen Höhen	143
5.5	Flugdynamik hypersonischer Raumgleiter	150

5.6	Satellitenbahnen mit Luftreibung (Aerobraking)	158
5.7	Theorie der Kármán-Linie	169
5.8	Das Tscheljabinsk und Tunguska Ereignis	175
5.9	Ein fly by Modell	182
6	Raketenballistik	187
6.1	Die Kopenhagener Preisaufgabe von 1810	190
6.2	Die Aufstiegsbahn einer Rakete	197
6.3	Die optimale Mondlandung	213
6.4	Der Max Q Punkt	220
6.5	Die Kinematik einer Flugabwehrrakete	222
6.6	Die vertikale Aufstiegsbahn	223
6.7	Die Keplerbahn	227
6.8	Die optimale Flugbahn	233
7	Schlussbemerkungen	239
Anhang		241
A.1	Die Lambertsche W - Funktion	241
A.2	Der Satz von Cranz	244
A.3	Das ballistische Integral	246
A.4	Optimierung von Stufenraketen	248
Literaturverzeichnis		259

1 Einleitung

Das Werfen von Speeren und Pfeilen als technische Jagd-Kunst hat die Menschheit schon seit Jahrtausenden beschäftigt und fasziniert. Aus rein empirischer Erfahrung hat man es hier sicherlich zu hoher Fertigkeit gebracht. Das heute benutzte Wort *Ballistik* kommt aus dem Griechischen, von *ballein* – Werfen. Die Entwicklung der Ballistik als Wissenschaft wurde in Westeuropa erst zu Beginn des sechzehnten Jahrhunderts stärker vorangetrieben. Hauptmotivation war natürlich die Frage, wie man Kanonenkugeln möglichst genau ins Ziel bringt und von welchen Faktoren dies abhängt. Und hier war zunächst die genaue Gestalt der Flugbahn von Interesse. Die besten Gelehrten und Mathematiker ihrer Zeit waren mit dem Problem *dieser ballistischen Kurve* beschäftigt: TARTAGLIA, G. GALILEI, I. NEWTON, J. BERNOULLI, F. BACON, L. EULER, J.L. LAMBERT, L. LEGENDRE, S.D. POISSON, und F. SIACCI, um nur Einige zu nennen. Doch was ist von ihren analytischen Ergebnissen heute noch bekannt, wo moderne Hochfrequenz - Radaranlagen jede Flugbahn genaustens vermessen können, aber das Schulwissen gerade noch die Wurfparabel begreift?

Obwohl schon um 1300 die ersten Feuerwaffen in Europa auftauchten, wusste man noch um 1500 nicht sicher, dass die Form der Flugbahn einer Kanonenkugel wirklich eine *kontinuierliche Kurve* ist. Nach den Lehren des ARISTOTELES sollte die Kanonenkugel mehr oder weniger in einer geraden Linie in die Luft steigen, dann plötzlich stoppen und in senkrechtem Fall zum Erdboden zurückfallen (*Impetustheorie*). Dann aber schrieb im Jahre 1537 der italienische Mathematiker TARTAGLIA¹ ein Buch über Artilleristik (*Nova Scientia*), indem er darauf hinwies, daß die Geschossbahn eine kontinuierliche Kurve sei, eine zur damaligen Zeit noch gewagte Behauptung. In einem zweiten Buch (*Quesiti et Inventioni*

¹Nicola Tartaglia (1499-1557), eigentlich Nicolo Fontana, italienischer Mathematiker, Physiker und Topograph. Tartaglia heißt der Stotterer, weil er 1512 von einem Schwert im Gesicht verletzt wurde. Ihm gelang zum erstenmal die Lösung einer speziellen kubischen Gleichung.

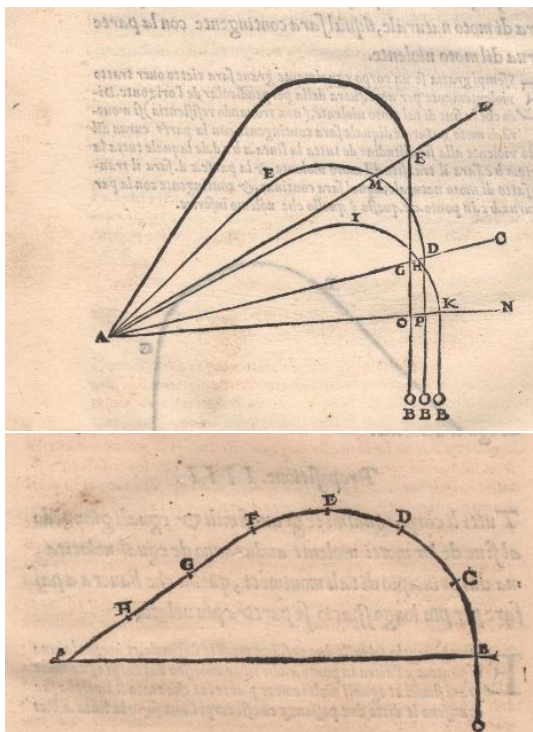


Fig. 1.1: Ballistische Kurven aus dem Buche „Nova Scientia“ des italienischen Mathematikers Nicolo Tartaglia aus dem Jahre 1537. Deutlich ist hier noch der Einfluss der „Impetustheorie“ zu sehen. Diese mathematisch - philosophische Vorstellung geht auf den Scholastiker Albert von Rickmersdorf (1316 - 1390) zurück und hat wohl noch älteren Ursprung.

diverse) aus dem Jahre 1546 erläuterte er diese Frage noch eingehender. Als Berater für militärische Fragen der Stadt Verona wurde er gefragt, **unter welchem Winkel eine Geschossbahn maximale Reichweite erzielt**. Durch experimentelle Tests im ebenen Gelände stellte er dann fest, daß dieser Winkel nahe **45 Grad** ist. Für die damaligen Geschwindigkeiten war das ein realistisches Resultat.

Der Erste, der die Flugbahn als eine parabelförmige Kurve ansah, war **GALILEO GALILEI**. Er argumentiert in seinem Werk *Der Dialog über die*

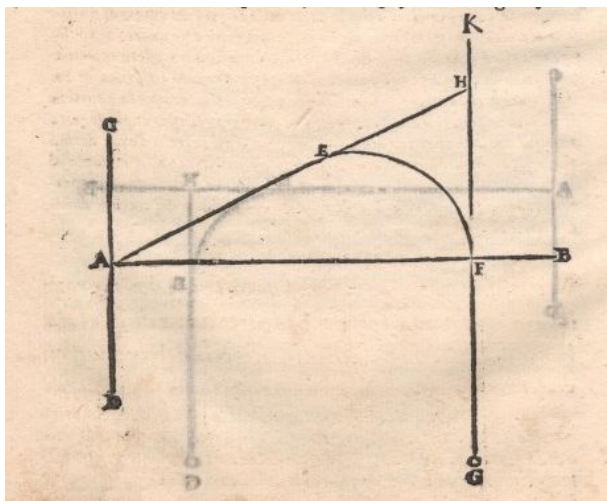
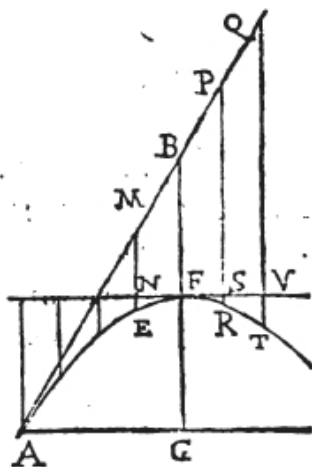


Fig. 1.2: In dem Buch „Nova Scientia“ des italienischen Mathematikers NICOLA TARTAGLIA aus dem Jahre 1537 erscheint die ballistische Kurve schon als kontinuierliche Kurve: Zunächst als eine Gerade, dann geht sie allmählich in einem Bogen in eine senkrechte Gerade (*senkrechte Asymptote*) zum Boden über. 1687 nahm I. NEWTON an, dass dies sehr gut einer Hyperbel entspricht.

zwei Weltsysteme von 1632, dass im Vakuum die Flugbahn eine Parabel sein müsse. Im Jahre 1644 veröffentlichte EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647) in seinem Hauptwerk *Opera Geometrica* ([61])² den Teil *De motu gravium* Hier verallgemeinert er die von GALILEI formulierte horizontale Theorie der Wurfparabel auf beliebige Abwurfwinkel und gibt eine Tabelle für die Wurfweiten an. Seine Theorie ergab für diesen Winkel exakt 45 Grad, in glücklicher Übereinstimmung mit den Messungen von TARTAGLIA aus dem Jahre 1537.

Im Jahre 1740 wurden in England von BENJAMIN ROBINS (1707-1751) mit dem ballistischen Pendel Messungen von Geschossgeschwindigkeiten gemacht. Die Ergebnisse lagen bei 400 m/s - 600 m/s, ein für damalige Zeit unglaublich hoher Wert. Die Ergebnisse erschienen in seinem Werk *New*

²Berühmt ist dieses Werk von Torricelli auch durch die Betrachtung eines unendlich langen Rotationskörpers (Trompete von Torricelli), welcher zwar ein endliches Volumen - Maß, aber ein unendliches Oberflächen - Maß hat.



Tabula continens Amplitudines Semiparabolarum ab eodem impetu fallarum. Supposita maxima amplitudine partium 10000. Sunt autem numeri Tabulae finis rectilinearum elevationis daptorum.

GRAD. Elevat.	Amplitudo Semipar.	GRAD. Elevat.	GRAD. Elevat.	Amplitudo Semipar.	GRAD. Elevat.
0	0000	90	23	7193	67
1	349	89	24	7431	66
2	698	88	25	7660	65
3	1045	87	26	7880	64
4	1392	86	27	8090	63
5	1736	85	28	8290	62
6	2079	84	29	8480	61
7	2419	83	30	8660	60
8	2756	82	31	8829	59
9	3090	81	32	8988	58
10	3410	80	33	9135	57
11	3746	79	34	9272	56
12	4067	78	35	9397	55
13	4384	77	36	9511	54
14	4695	76	37	9613	53
15	5000	75	38	9703	52
16	5299	74	39	9781	51
17	5592	73	40	9848	50
18	5870	72	41	9903	49
19	6157	71	42	9945	48
20	6428	70	43	9976	47
21	6691	69	44	9994	46
22	6947	68	45	10000	45

Fig. 1.3: Die Erklärung der Wurfparabel nach EVANGELISTAE TORRICELLI 1644. In der mittleren Spalte der Tabelle sind die Wurfweiten in der Form $10000 \sin(2\Theta)$ eingetragen, wobei Θ den Elevationswinkel des Kanonenrohres bezeichnet. Die Wurfweite ist invariant gegenüber der Transformation $\Theta \rightarrow 90^\circ - \Theta$.

Principles of Gunnery (1742), für welches er 1746 die Copley Medaille erhielt, die höchste Auszeichnung der Royal Society. Das Werk erlangte im 18. Jahrhundert große Bedeutung und wurde in verschiedene Sprachen übersetzt und erweitert (L. EULER, 1745). So schrieb für die französische Ausgabe der Ökonom und Politiker A. R. J. TURGOT (1727-1781) an LOUIS XVI: (Zitat durch Clifford Truesdell, *An Idiot's Fugitive Essays on Science* (1984), p. 337)

The famous Leonhard Euler, one of the greatest mathematicians of Europe, has written two works which could be very useful to the schools of the Navy and the Artillery. One is a Treatise on the Construction and Manoeuver of Vessels; the other is a commentary on the principles of artillery of Robins . . . I propose that your Majesty order these to be printed.

Denn L. EULER hatte das Buch von ROBINS mit erheblichen mathemati-

schen Ergänzungen (*Lehrsätze der Artillerie 1745*) ins Deutsche übersetzt und so seinen Wert erheblich gesteigert. 1766 veröffentlichte dann J.H. LAMBERT eine eigene theoretische Untersuchung und konstruierte eine sogenannte „**echelle ballistique**“. J. LAMBERT zeigte 1766, dass man bei der Auswertung mit dem ballistischen Pendel nicht mit elastischen Stößen, sondern eher mit inelastischen Stößen zu tun hat. Noch unglaublicher war dann die Messung der Geschossabbremmung durch den Luftwiderstand. Nun erkannte man die Bedeutung des Luftwiderstandes bei hohen Geschwindigkeiten.

I. NEWTON hatte schon 1687 gezeigt, daß die Bremskräfte mit dem Quadrat der Geschwindigkeit ansteigen müssten. Doch eine genauere Lösung gab er nicht an. Die erste allgemeine analytische Lösung des ballistischen Problems wurde durch J. BERNOULLI im Mai - Heft der *Acta Eruditorum Lipsiae* Seite 246 des Jahres 1719 gegeben. Die Motivation zu dieser Untersuchung entstand offenbar durch eine „Provokation“ des schottischen Mathematikers und Astronomen J. KEILL, der es BERNOULLI sehr Übel nahm, dass ein Mathematiker minderen Ranges (Bernoulli) einem Mathematiker höchsten Ranges (Newton) einen kleinen Fehler in der ersten Ausgabe seiner *Principia* bei der geometrischen Konstruktion einer ballistischen Flugbahn nachgewiesen hat. J. BERNOULLI nahm für die Bremsbeschleunigung des Luftwiderstandes ein Gesetz der Form v^n an und erhielt für die ballistische Kurve bei beliebigem n die parametrische Darstellung in horizontaler x - Richtung und in vertikaler y - Richtung

$$x = a \int \frac{dp}{\mathbf{Z}(p)^{2/n}}, \quad y = a \int \frac{p dp}{\mathbf{Z}(p)^{2/n}}, \quad (1.1)$$

mit

$$\mathbf{Z}(p) = b \int (1 + p^2)^{(n-1)/2} dp. \quad (1.2)$$

Das Problem kann also auf eine einzige *Quadratur (Integral)* zurückgeführt werden, was dann aber G.F. TEMPELHOF 1781 zu der Bemerkung veranlasste, dass diese Lösung *sich nicht ohne die Bedingung der „concessis quadraturis“ berechnen ließ*. Schließlich lösten J. BERNOULLI 1719 und L. EULER 1743 das ballistische Problem mit Hilfe der Differentialrechnung für ein erweitertes quadratisches Widerstandsgesetz. Einen gewissen Schlusspunkt setzte dann der schon oben erwähnte Generalleutnant G. F. TEMPELHOF mit seinem Werk *Le Bombadier Prussien* von 1781, welches von FRIEDRICH DEM GROSSEN sofort unter militärische



Fig. 1.4: Die Zarenkanone (Mörser) von 1586, wie sie heute am Kreml in Moskau zu sehen ist. Die Kugeln wurden später (1834) zur Dekoration gegossen. Kaliber 890mm. Quelle: Wikipedia Commons)

Geheimsache gestellt wurde. Die Gründe sind nicht ganz klar, zumal in diesem Buch komplizierte längliche Reihenentwicklungen zur Darstellung der ballistischen Kurve benutzt werden, deren praktische Verwendbarkeit höchst zweifelhaft war und wohl auch nie numerisch ausgewertet wurden – ganz im Gegensatz zu denen von J.H. LAMBERT. Klassische Lehrbücher zur Ballistik schrieben schließlich I. DIDION 1848 in Frankreich und F. SIACCI 1888 in Italien und C. CRANZ von 1896 an in Deutschland ([16])³. Ab 1942 wurde in den USA der *Rockefeller Differential Analyser*, der letzte am **MIT** von dem amerikanischen Erfinder VANNEVAR BUSH entwickelte rein mechanische Walzen - Analog - Rechner, dazu benutzt, die nichtlinearen Differentialgleichungen der Ballistik für unterschiedliche Spezialfälle wie *Bombenabwurf* und *Flugabwehr* zu lösen.

³CARL JULIUS CRANZ (1858 - 1945). Wuchs in einer Pfarrersfamilie auf. Privatdozent für Mathematik und Mechanik an der TH Stuttgart (1884-1903), Professor an der Militärtechnische Akademie (1903-1920) in Berlin, Professor für technische Physik an der TH Berlin (1929-1935) sowie Wissenschaftlicher Berater der chinesischen Regierung in Nanking (1935-1937)

Wie man lesen kann, hat das ballistische Problem weitgehende Anwendungen in der Geschichte erfahren: Seien es die Bahnen von Kanonenkugeln, von Tennisbällen, von Golfbällen, von Fußbällen (mit dem *Magnuseffekt* bei rotierenden Bällen), von Raumfahrzeugen oder von auf die Erde stürzenden Meteoriten – überall spielt das ballistische Problem in unterschiedlichen Ausprägungen eine Rolle.

Ein besonderes isoliertes Problem stellten zu Beginn des 19. Jahrhunderts Experimente mit fallenden Kugeln in hohen Türmen oder tiefen Bergwerksschächten dar, die aufgrund der Erdrotation eine sehr kleine „Ostablenkung“ erfuhren. Da diese „Ostablenkung“ ein direkter mechanischer Beweis der Erdrotation darstellte (das Foucaultpendel kam ja erst später), hat man damals viel Mühe auf die genaue Berücksichtigung des Luftwiderstandes auf diese fallenden Kugeln verwandt. Hier sind insbesondere die Untersuchungen von J.F. BENZENBERG, P.S. LAPLACE sowie von C.F. GAUSS um 1802 zu nennen.

2 Grundgleichungen

Im 17. Jahrhundert konnte man mit der neuen Differentialrechnung vier große *Kurvenprobleme* angehen und lösen:

- Bahnkurve der Planeten um die Sonne (Kegelschnitte)
- Die Kettenlinie (Form eines hängenden Seiles)
- Das Brachystochrone Problem (minimale Rollkurven)
- Die Bahnkurve einer Kanonenkugel (Wurfparabel nach Torricelli - Galilei oder Hyperbel nach Newton)

Von all diesen Kurvenproblemen ist das ballistische Problem (Wurfbe-
wegung mit Luftwiderstand) das Schwierigste. Selbst I. NEWTON hatte
mit diesem Problem seine Schwierigkeiten, denn seine geometrische Kon-
struktion der ballistischen Kurve als Hyperbel in der ersten Auflage
der Principia war nur eine Approximation, keine exakte Lösung einer
Differentialgleichung. Im Laufe des 18. Jahrhunderts konnten für das
quadratische Luftwiderstandsgesetz allerdings Reihenentwicklungen oder
genäherte analytische Lösungen gefunden werden.

Im Folgenden soll das klassische Problem der äußeren Ballistik mit
besonderer Berücksichtigung des 18. Jahrhunderts diskutiert werden. Als
Anregung diene hier auch ein Kapitel aus dem Lehrbuch zur Geschichte
der mechanischen Prinzipien von I. Szabo ([55]).

Ist der Luftwiderstand eine quadratische Funktion der Geschwindig-
keit $v = |\mathbf{v}|$, so lauten die allgemeinen Bewegungsgleichungen für eine
rotierende Kanonenkugel im Erdschwerefeld bei völliger *Windstille*

$$\dot{\mathbf{v}} = -k v \mathbf{v} + \epsilon (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) - \mathbf{g} \quad (2.1)$$

Hier bedeutet k den ballistischen Koeffizienten von der Dimension einer
inversen Länge und das vektorielle Kreuzprodukt $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ die Beschleu-
nigung durch den sogenannten *Magnuseffekt* ([35], [44]). Der Vektor $\boldsymbol{\omega}$

liegt parallel zur Rotationsachse der Kanonenkugel und sein Betrag entspricht der Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Kugel. Der Vektor $\mathbf{g} = \{0, 0, g\}$ beschreibt die zum Boden gerichtete Erdbeschleunigung. ϵ ist eine dimensionslose Konstante, die in der Größenordnung

$$\epsilon \sim \frac{\varrho_{Luft}}{\varrho_{Kugel}} \quad (2.2)$$

liegt. Kompliziertere Situationen entstehen bei schneller Rotation, wenn das Geschoss nicht mehr eine Kugel, sondern längliche Gestalt hat (Kreisdynamik)¹. Die Querschleunigung, beschrieben in der obigen Bewegungsgleichung durch den Term $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, war die Hauptursache für die mysteriösen Seitenabweichungen oder Weitenvariationen bei ballistischen Kurven, die man sich im 18. Jahrhundert noch nicht richtig erklären konnte. Die richtige Vermutung aus zahllosen Experimenten hatte schon der englische Militäringenieur B. ROBINS (1702 - 1751) , der auch schon vorschlug, dass Kanonen *gezogene Rohre* haben sollten ([45]).

Die Preußische Akademie der Wissenschaften hatte noch im November 1793 ein Preisausschreiben zu diesem Thema vorgeschlagen. Darin hieß es: ([46])

Da die Erfahrung lehrt, dass die in einem widerstehenden Mittel geworfenen Körper, Bomben, zum Beispiel, sich meistens mehr oder weniger von der lochtrechten Ebene entfernen, in welche sie geworfen werden; so verlangt die Königliche Akademie zu wissen: I) Wie und aus welchen Ursachen diese Abweichung statt findet? II) Wie ihre Quantität in jedem einzelnen Falle, mittels der anfänglichen Geschwindigkeit, des Elevationswinkels, der Gestalt des Körpers u.s.w. bestimmt werden kann.

Den Preis erhielt damals der Artillerieleutnant J.P. VON ROHDE (1759-1834), der aber irrtümlich die Abweichungen anstatt der Eigenrotation der geworfenen Körper den Windkräften und besonders den Zündern zuschrieb. Als Rechtfertigung für die Vergabe des Preises an J.P. VON ROHDE gab die Akademie erklärend an:

¹Noch komplizierter ist die gekoppelte Bahn - Kreisdynamik des von den Menschen seit über 20000 Jahre benutzten Bumerangs

Die Akademie erkennt, dass die Aufgabe, welche zur gegenwärtigen (unter dem 12. Februar 1794 eingekommenen) Abhandlung Anlass gegeben hat, sehr schwer aufzulösen ist;. Auch sind die aufgeworfenen Fragen bey weitem noch nicht völlig beantwortet. Die Erfahrung lehret, dass bei Kugeln ohne Zünder ebenfalls eine beträchtliche Abweichung stattfindet. Indessen konnte die Akademie nicht unterlassen diese Schrift zu krönen, aus welcher viel Scharfsinn und tiefe Einsichten in die höhere Mathematik hervorleuchten, und durch welche die Bahn zu fernerer Untersuchungen auf eine glückliche Art eröffnet worden.

Eine zufriedenstellende physikalische Erklärung für diese Abweichung ballistischer Bahnen konnte erst 1852 der Physiker H.G. MAGNUS (1802-1870) geben. Aber auch die rein mathematische Beschreibung ist nicht einfach und bedarf - wie oben zu sehen - der Vektoralgebra. Wir definieren den dreidimensionalen Tangentenvektor \mathbf{e} der Bahn und dessen zeitliche Änderung $\dot{\mathbf{e}}$ gemäß

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}; \quad \dot{\mathbf{v}} = \dot{v} \mathbf{e} + v \dot{\mathbf{e}}. \quad (2.3)$$

Einsetzen in die obige Gleichung ergibt

$$\dot{v} \mathbf{e} + v \dot{\mathbf{e}} = -k v^2 \mathbf{e} + \epsilon v (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) + \mathbf{g} \quad (2.4)$$

Skalare Multiplikation mit \mathbf{e} führt für \dot{v} zu der Gleichung

$$\dot{v} = -k v^2 + \mathbf{e} \circ \mathbf{g}. \quad (2.5)$$

Setzt man dies wieder in die obige Gleichung ein, so folgt die Relation

$$v \dot{\mathbf{e}} = +\epsilon v (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) + \mathbf{g} - \mathbf{e}(\mathbf{e} \circ \mathbf{g}). \quad (2.6)$$

Der Vektor $\dot{\mathbf{e}}$ steht senkrecht auf dem Tangentenvektor \mathbf{e} und es gilt $\mathbf{e} \circ \dot{\mathbf{e}} = 0$. Anstatt nach der Zeit differenzieren wir nun nach der Bogenlänge s . Wegen $ds = v dt$ gilt so auch

$$v^2 \frac{d\mathbf{e}}{ds} = +\epsilon v (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) + \mathbf{g} - \mathbf{e}(\mathbf{e} \circ \mathbf{g}). \quad (2.7)$$

Diese Gleichung definiert die Krümmung $K = 1/r$ der ballistischen Kurve. Multiplizieren wir (2.6) noch skalar mit $\mathbf{g} \times \mathbf{e}$, so gilt für das Spatprodukt

$$[\mathbf{g} \mathbf{e} \dot{\mathbf{e}}] = \epsilon (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) \circ (\mathbf{g} \times \mathbf{e}). \quad (2.8)$$

Ohne Eigenrotation bewegt sich die Kugel immer entlang der *lotrechten Ebene*, die durch die Vektoren \mathbf{e} und \mathbf{g} aufgespannt werden. Mit Rotation gilt dies aber nicht mehr, wie die obige Vektorgleichung zeigt. Abweichungen von der Flugbahn können je nach Rotationssinn sowohl nach Rechts wie nach Links geschehen. Es können aber auch künstlich „Auftriebe“ oder „Abtriebe“ ohne seitliche Abweichungen entstehen. Abhilfe kann nur dadurch erreicht werden, dass der Rotationsvektor $\boldsymbol{\omega}$ der Kanonenkugel möglichst exakt parallel zum Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} ausgerichtet wird. Genau dies wurde ab der Mitte des 19ten Jahrhunderts durch *gezogene Rohre mit Führungsrillen* erreicht.

Der „Magnuseffekt“ spielt heutzutage bei sehr unterschiedlichen Sportarten eine wichtige Rolle: Fußball (**Bananenflanke**, **Flutterball**), Tennis - Tischtennis (**Topspin**, **Slice**), und Cricket (**spin bowling**). Golfbälle besitzen sogenannte **dimples**, kleine kreisförmige Dellen an der Balloberfläche, welche die Wirksamkeit des „Magnuseffektes“ noch erhöhen. Um den Rückstoß bei einem Geschütz zu vermindern und damit die Genauigkeit zu erhöhen, wurden zudem im 20. Jahrhundert sogenannte *Mündungsbremsen* („*muzzle brakes*“) an das Rohrende montiert. Ausführlich werden solche verwickelten Fragen in dem modernen Standardwerk von R.L. MCCOY über äußere Ballistik behandelt ([34]).

Wir beschränken uns zunächst auf Flugbahnen von *nicht - rotierenden Körpern*, bei denen das Spatprodukt $[\mathbf{g} \mathbf{e} \dot{\mathbf{e}}]$ immer Null ist. Sonderfälle wie die Flugbahn eines rotierenden Fußballes oder eines schnell rotierenden Golfballes werden gesondert behandelt. Die x - Achse unseres lokalen Koordinatensystems zeigt immer in horizontale, die y - Achse immer in vertikale Richtung. Dann gelten bei *Windstille* und quadratischem Widerstandsgesetz die zwei Gleichungen

$$\ddot{x} = (a - k v^2) \frac{\dot{x}}{v}, \quad \ddot{y} = (a - k v^2) \frac{\dot{y}}{v} - g \quad (2.9)$$

wobei k der ballistische Brems-Koeffizient (*drag force*) in der Einheit einer inversen Länge und g die Fallbeschleunigung bezeichnen. Die Größe

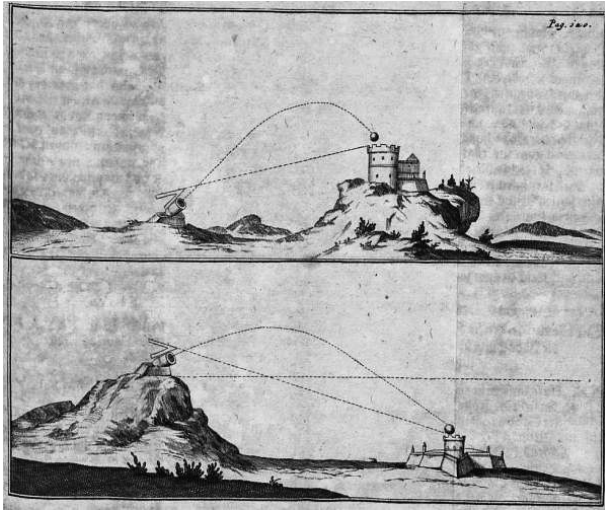


Fig. 2.1: Der Ingenieur und Architekt NICOLAS FRANCOIS BLONDEL (1618 - 1686) schrieb das erste ausführliche Werk über „die Kunst, Bomben zu werfen“. Er benutzte schon die parabolische Kurventheorie nach Galilei und Torricelli, um die ballistische Kurve zu beschreiben. Für die damaligen Geschwindigkeiten eine gute Näherung.

a beschreibt eine Eigenbeschleunigung des Geschosses in Richtung der momentanen Bahntangente. Wir sehen hier schon den fließenden Übergang von *klassischer Ballistik* zur *Raketenballistik*, zumal in *umgekehrter Zeitrichtung* betrachtet eine *bremsende Bewegung* wie eine *beschleunigte Bewegung* erscheint und auch so beschrieben werden kann.

3 Die Wurfparabel

Bevor wir die Wirkung einer bremsenden Kraft auf die Flugbahn genauer untersuchen, wollen wir den einfachsten Fall zuerst behandeln. Ohne Luftwiderstand gelten die sehr einfachen Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -g. \quad (3.1)$$

Als Lösungen erhält man die schon von GALILEI und TORRICELLI diskutierte Wurfparabel. Man bekommt für die Bahnkurve als Funktion der Zeit t die Gleichungen

$$\begin{aligned} x[t] &= v_0 \cos[\Theta] t, \\ y[t] &= v_0 \sin[\Theta] t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

und für die Gestalt der Bahn die Parabel

$$y[x] = \tan[\Theta] x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos[\Theta]^2}.$$

Dabei ist Θ der Elevationswinkel, v_0 die Abschussgeschwindigkeit und t die verflossene Zeit. Die Wurfweite W ergibt sich bei ebener Bodenfläche zu

$$W = \frac{v_0^2}{g} \sin[2 \Theta]. \quad (3.3)$$

Hieraus folgt sofort die maximale Schussweite bei einem Elevationswinkel von $\theta = 45^\circ$. Die maximale Steighöhe H ergibt sich zu

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin[\Theta]^2 \quad (3.4)$$

und die Flugzeit T zu

$$T = \frac{2 v_0}{g} \sin[\Theta] \quad (3.5)$$

Aus den beiden letzteren Formeln folgt die für alle Wurfparabeln gültige Beziehung

$$H = \frac{1}{8} g T^2. \quad (3.6)$$

Diese Relation¹ gehört zu den bemerkenswertesten Formeln der Ballistik, weil sie auch *mit Luftwiderstand* noch eine sehr gute Näherung darstellt. Selbst in der Raketenballistik spielt sie eine gewisse Rolle, wie wir später noch sehen werden.

Aus der obigen parabolischen Theorie kann man zudem noch die Beziehung

$$\frac{1}{2} g T^2 = W \tan[\Theta] \quad (3.7)$$

ableiten, welche im 18. Jahrhundert für die Länge von *Brandröhren* wichtig war. So liest man bei J. VEGA den Satz ([63]): *Die Quadrate der Brandröhrenlängen verhalten sich gegeneinander wie die Produkte aus den Wurfweiten multipliziert mit den Tangenten der Elevationswinkel vom Horizonte...*

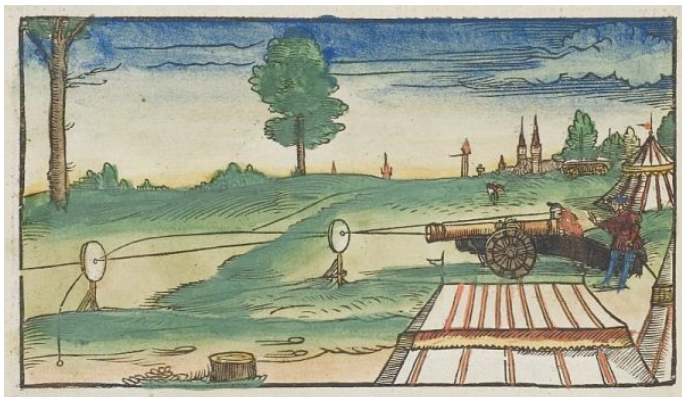
Hat die Normale der ebenen Bodenfläche zum gravitativen Lot eine kleine Neigung α ($\alpha < 0$ Gefälle, $\alpha > 0$ Steigung), so ist die Wurfweite *auf dieser geneigten Fläche* durch den Ausdruck

$$w = \frac{W}{\cos[\alpha]} = \frac{2 v_0^2 \cos[\Theta] \sin[\Theta - \alpha]}{g \cos[\alpha]^2} \quad (3.8)$$

gegeben. Diese Formel löst das Problem des französischen Baumeisters und Ingenieurs N.F. BLONDEL (1618-1686) (siehe Fig. 2.1). Maximal wird diese Schussweite im geneigten Gelände bei der Elevation

$$\Theta_m = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}, \quad (3.9)$$

¹In England auch SLADENSche Formel genannt, wohl nach E.B. SLADEN (1831-1890) benannt, der in Indien als Offizier diente.



Quelle: Deutsche Fotothek

Fig. 3.1: Eine Illustration aus dem Buch *ARCHITECTUR* von WALTHER HERMENIUS RYFF, Nürnberg 1547. Insbesondere hier über die „mathematischen“ und „mechanischen“ Künste. (Quelle: [wikimedia.commons](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Architectur_1547.jpg))

welches die Winkelhalbierende zwischen dem gravitativen Lot und der geneigten Bodenfläche beschreibt. Der relative Elevationswinkel Θ_α in Bezug auf die geneigte Ebene ist also $\Theta_\alpha = \Theta - \alpha$. Um 1900 stellte man sich die Aufgabe, bei welchen identischen Winkeln Θ_α und Θ die Schussweite im ebenen und geneigten Gelände identisch ist. Diese Forderung führt zu der Gleichung

$$\cos[\Theta + \alpha] = \cos[\Theta] \cos[\alpha]^2 \quad (3.10)$$

Diese implizite Relation hat nur für Neigungswinkel $\alpha > 0$ *ansteigendes Gelände* zwei Lösungszweige, die in Figur (3.2) dargestellt sind. Der kritische Grenzwinkel für die Elevation ist dabei

$$\cos[\Theta_c] = \sqrt{\frac{9 + 5\sqrt{5}}{22}} \approx 16.714^\circ, \quad (3.11)$$

was einem ansteigenden Geländewinkel α von

$$\cos[\alpha_c] = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \approx 51.827^\circ \quad (3.12)$$

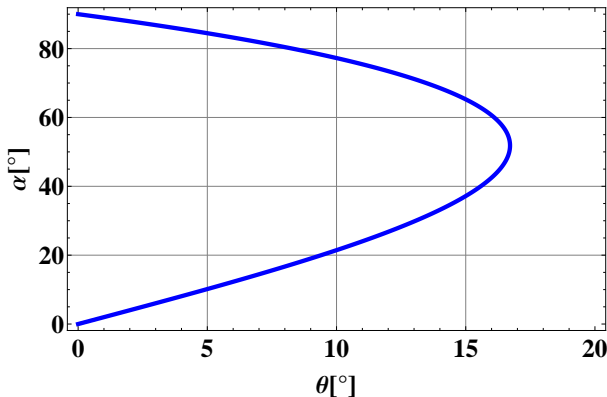


Fig. 3.2: Die beiden Lösungswege der impliziten Relation (3.10).

entspricht. Eine weitere Komplizierung des so behandelten Problems tritt ein, wenn das Ziel selber beweglich ist (**FLAK**). Historische Probleme dieser Art können nur noch *iterativ* gelöst werden.

Zur Abrundung sollen vier ausgewählte Aufgaben zur Wurfparabel diskutiert werden, die zum Teil von C. CRANZ in seinem Lehrbuch ([16]) diskutiert wurden.

Optimale Parabel: *Ist es möglich, von der Spitze der Cheopspyramide aus mit einem Stein über die Basis der Pyramide hinaus zu werfen?*

Dies berühmte Problem läuft darauf hinaus, den optimalen Weitwurf von einer Anhöhe H zu bewerkstelligen (Analogie im Sport: *Kugelstoßen*). In *umgekehrter Zeitrichtung* betrachtet entspricht diese Aufgabe dem Problem, mit minimaler Geschwindigkeit oder mit dem geringsten Energieaufwand eine Anhöhe H in der horizontalen Entfernung W zu treffen.

Wir untersuchen das Problem mit den parametrischen Gleichungen

$$x[t] = v_1 \cos[\theta_1] t, \quad y[t] = H + v_1 \sin[\theta_1] t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (3.13)$$

Die Größen v_1 und θ_1 bedeuten die Geschwindigkeit und den Abgangswinkel auf der Anhöhe H . Aus der Bedingung $y[T] = 0$ folgt für die

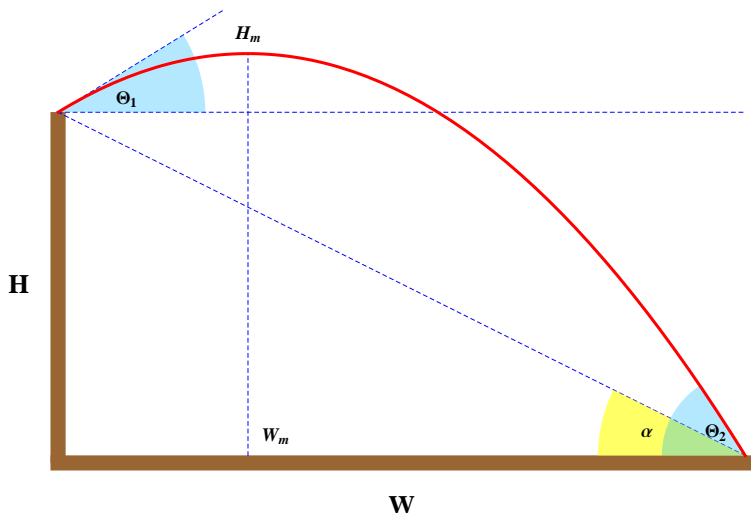


Fig. 3.3: Der optimale Wurf von einer Anhöhe H , wenn die Weite W vorgegeben ist. Es gilt $\Theta_1 = \pi/4 - \alpha/2$ und $\Theta_2 = \pi/4 + \alpha/2$. Auch die optimale Abwurfgeschwindigkeit wird durch H und W eindeutig bestimmt. Vergleiche hierzu die Figur von BLONDEL aus dem 17. Jahrhundert (2.1).

Flugzeit bis zum Boden

$$T = \frac{v_1}{g} \sin[\theta_1] + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} \sin^2[\theta_1] + \frac{2H}{g}}. \quad (3.14)$$

Die Aufprallgeschwindigkeit ergibt sich zu (Energiesatz)

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gH}. \quad (3.15)$$

Die Wurfweite W ergibt sich mit der Flugzeit T zu ($0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$)

$$W = \frac{v_1}{g} \cos[\theta_1] \left(v_1 \sin[\theta_1] + \sqrt{v_1^2 \sin^2[\theta_1] + 2gH} \right). \quad (3.16)$$

Maximal wird diese Wurfweite bei dem Abgangswinkel $\theta_1 \equiv \Theta_1$ und dem dazugehörigen Aufprallwinkel $\theta_2 \equiv \Theta_2$ und (3.15)

$$\cos[2\Theta_1] = \frac{gH}{gH + v_1^2}, \quad \cos[2\Theta_2] = \frac{gH}{gH - v_2^2}. \quad (3.17)$$

Die erste Formel löst hier das Problem beim Kugelstoßen, wenn bei vorgegebener Geschwindigkeit v_1 und H der optimale Abgangswinkel gesucht wird. Einsetzen der optimalen Winkel in die Wurfweite führt nun zu den beiden Beziehungen

$$W = \frac{v_1}{g} \sqrt{v_1^2 + 2gH}, \quad W = \frac{v_2}{g} \sqrt{v_2^2 - 2gH}. \quad (3.18)$$

Werden diese Gleichungen nach v_1 und v_2 aufgelöst, ergeben sich die wichtigen Relationen für die optimalen (minimalen) Abwurfgeschwindigkeiten auf der Anhöhe

$$v_1 = \sqrt{g \left(\sqrt{W^2 + H^2} - H \right)} \quad (3.19)$$

sowie am Boden

$$v_2 = \sqrt{g \left(\sqrt{W^2 + H^2} + H \right)}. \quad (3.20)$$

Werden diese Ergebnisse in die Formeln (3.17) eingesetzt, so ergibt sich

$$\tan[2\Theta_1] = \frac{W}{H}, \quad \tan[2\Theta_2] = -\frac{W}{H} \quad (3.21)$$

mit der Bilanz $\Theta_1 + \Theta_2 = \pi/2$. Führt man noch den Böschungswinkel

$$\tan[\alpha] = \frac{H}{W}$$

ein, so gilt auch

$$\Theta_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}, \quad \Theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}. \quad (3.22)$$

Im Falle $H = 0$ ergibt sich die bekannte Forderung $\Theta_1 \equiv \Theta_2 = 45^\circ$ und $v_1 \equiv v_2 = \sqrt{gW}$, für $W = 0$ dagegen $v_1 = 0$ und $v_2 = \sqrt{2gH}$.

Die Flugzeit T dieser energetisch günstigsten Parabelbahn von der Anhöhe zum Boden (oder umgekehrt) ergibt sich aus den obigen Formeln zu

$$\sqrt{H^2 + W^2} = \frac{1}{2} g T^2. \quad (3.23)$$

Der horizontale Abstand W_m der maximalen Flughöhe zum Abgangsort ist durch die Beziehung

$$W_m = \frac{1}{2} W \left(1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + W^2}} \right) \quad (3.24)$$

gegeben. Für die maximale Flughöhe H_m erhalten wir mit Hilfe der Flugzeit T

$$H_m = \frac{(2H + gT^2)^2}{8gT^2}. \quad (3.25)$$

Im Falle $H = 0$ erhalten wir wieder die bekannte Relation zwischen der Gipfelhöhe und der Flugzeit in einer flachen Ebene - dann allerdings für alle Abgangswinkel θ gültig.

Mit $H = 137.2\text{ m}$ und $W = 113.75\text{ m}$ erhält man in der Aufgabe

$$\Theta_1 = 19.83^\circ; \quad \Theta_2 = 70.17^\circ; \quad v_1 = 20.06\text{ m/s}, \quad v_2 = 55.63\text{ m/s}.$$

Da als typische Geschwindigkeit der Werfer etwa 24 m/s angenommen wird (statistisches Mittel), könnte zumindest ohne Luftwiderstand dieser Wurf gelingen.

Das Treffen einer Tonscheibe: *Eine Wurfmaschine hat eine Tonscheibe in die Luft geworfen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ stellt ein Schütze fest, dass sich diese Scheibe in der Höhe H und in der horizontalen Entfernung W befindet und er sich exakt in der Bahnebene befindet. Ihre Geschwindigkeit beträgt dabei v_T und die Elevation sei θ_T (T : Target). Im gleichen Zeitpunkt $t = 0$ feuert der Schütze eine Kugel, dessen Anfangsgeschwindigkeit v_P beträgt, ab. Welche Elevation θ_P muss der Schütze wählen, damit ein Treffer in der Luft gelingt? (P : Projektil)* Die Aufgabe kann auch als *Abfangproblem* einer Rakete durch eine andere Rakete aufgefasst werden. Wir nehmen hier idealisiert an, dass beide Körper Parabelbahnen in der gleichen vertikalen Ebene ausführen. Der Luftwiderstand soll vernachlässigt werden. Da beide Körper eine Wurfparabel beschreiben, haben wir für eine Kollision die notwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} v_T \cos[\theta_T] t_c &= W - v_P \cos[\theta_P] t_c, \\ H + v_T \sin[\theta_T] t_c - \frac{1}{2} g t_c^2 &= v_P \sin[\theta_P] t_c - \frac{1}{2} g t_c^2 \end{aligned}$$

Damit ist ein einfaches **Abfangproblem** definiert, bei der beide Flugbahnen Parabeln sind. Gefragt ist nach dem kritischen Abschusswinkel θ_P und dem Zeitpunkt t_c der Kollision oder des Treffers. Da beide Geschosse derselben Gravitationsbeschleunigung unterliegen, fällt dieser Term in

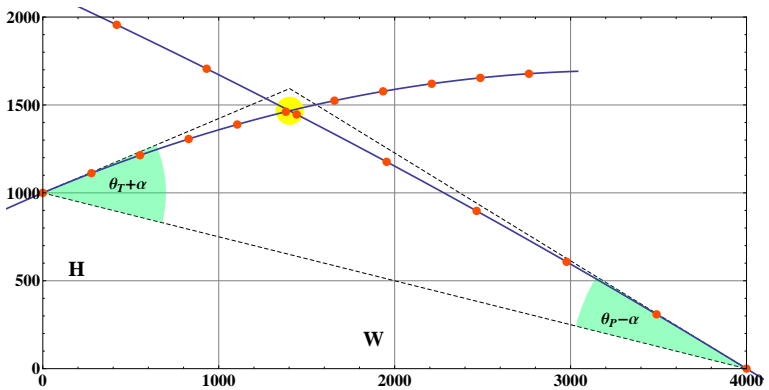


Fig. 3.4: Das Abfangproblem von einem „Geschoss“ durch ein anderes „Geschoss“ und das dazugehörige Kollisionsdreieck. Der Winkel $\alpha = \arctan[H/W]$ ist hier der zeitlich leicht veränderliche Neigungswinkel der Verbindungslinie beider Flugkörper zur Horizontalen. Das linke Target-Geschoss bewegt sich mit 300 m/s, das rechte Abfanggeschoss mit 600 m/s. Zu jedem Zeitpunkt muss die Beziehung $v_P \sin[\theta_P - \alpha] = v_T \sin[\theta_T + \alpha]$ des Geschwindigkeitsdreieckes (Sinussatz) erfüllt sein. Die zeitlichen Abstände der roten Markierungen entsprechen genau einer Sekunde. Demnach findet bei etwa $t = 5.07$ s die Kollision statt.

der zweiten Gleichungen heraus. Wir haben so trotz Gravitation die reduzierten Bedingungen

$$\begin{aligned} v_T \cos[\theta_T] t_c &= W - v_P \cos[\theta_P] t_c, \\ H + v_T \sin[\theta_T] t_c &= v_P \sin[\theta_P] t_c. \end{aligned}$$

Eliminieren wir hier den Kollisionszeitpunkt, so erhalten wir zunächst die Relation

$$v_P (H \cos[\theta_P] - W \sin[\theta_P]) + v_T (H \cos[\theta_T] + W \sin[\theta_T]) = 0.$$

Durch eine trigonometrische Umformung folgt daraus die bemerkenswerte Relation

$$v_P \sin[\theta_P - \alpha] = v_T \sin[\theta_T + \alpha]. \quad (3.26)$$

Der Winkel α ist dabei der Neigungswinkel der Verbindungslinie zwischen den beiden Geschossen und der Horizontalen und berechnet sich zu

$$\tan[\alpha] = \frac{H}{W}. \quad (3.27)$$

Die Gleichung (3.26) ist Grundlage der sogenannten *Proportional-Navigation*, bei welcher sich das Projektil mit einer nahezu zeitlich konstanten Peilung $\theta_p - \alpha$ dem Zielobjekt nähert. Für einen Treffer muss dabei zu jedem Zeitpunkt die Gleichung (3.26) erfüllt sein - zumindest wenn sich beide in einer Wurfparabel bewegen.

MRSI-Verfahren: *Dasselbe Ziel in beliebiger Höhenlage zum Abschussort wird gleichzeitig von zwei Kugeln getroffen, die mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 und den Abgangswinkeln Θ_1 und Θ_2 abgeschossen wurden. Wie groß ist der Unterschied in den Flugzeiten?*

Diese Aufgabe knüpft an das moderne **MRSI** - Verfahren (*Multiple Rounds Simultaneous Impact*) an, bei dem mit *modularen Treibladungen* mehrere „Kanonenkugeln“ zu unterschiedlichen Zeiten und Elevationen abgeschossen werden, aber *gleichzeitig* am entlegenen Ziel ankommen. Das Verfahren eignet sich aber wohl nur für Einzelgeschütze und funktioniert natürlich nur unterhalb der maximalen *Schussreichweite*.

Nehmen wir an, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Kugel mit der Marke 1 abgeschossen wurde, zu einem etwas späteren Zeitpunkt $t = \delta T$ die Kugel mit der Marke 2. Dann müssen die folgenden zwei notwendigen **dynamischen** Bedingungen für die Flugzeit T der Kugel „1“ und der Zeitverzögerung ΔT für Kugel „2“

$$v_1 \cos[\Theta_1] T = v_2 \cos[\Theta_2] (T - \Delta T) \quad (3.28)$$

sowie

$$v_1 \sin[\Theta_1] T - \frac{1}{2} g T^2 = v_2 \sin[\Theta_2] (T - \Delta T) - \frac{1}{2} g (T - \Delta T)^2 \quad (3.29)$$

erfüllt sein. Zu diesen zeitlichen Bedingungen tritt noch die **geometrische** Forderung, dass beide Wurfparabeln die Koordinaten des Zielortes enthalten müssen. Dies schränkt die möglichen Werte von $v_{1,2}$ und $\Theta_{1,2}$ erheblich ein. Aus den obigen Gleichungen lassen sich die zwei Unbekannten t und T berechnen. Man erhält für die Flugzeit von Kugel 1

$$T = \frac{2 v_1 v_2^2 \cos[\Theta_2] \sin[\Theta_1 - \Theta_2]}{g (v_2^2 \cos[\Theta_2]^2 - v_1^2 \cos[\Theta_1]^2)} \quad (3.30)$$

und die Zeitverzögerung für die Kugel 2

$$\Delta T = \frac{2 v_1 v_2 \sin[\Theta_1 - \Theta_2]}{g (v_1 \cos[\Theta_1] + v_2 \cos[\Theta_2])}. \quad (3.31)$$

Genau dies ist auch das Ergebnis von C. CRANZ in ([16]).

Aufgabe von C. Cranz: *Ein Mörser wird auf die Spitze eines Burgturmes gerichtet, der Schuss trifft den Turm an seinem Fußpunkt in der Horizontalebene durch das Geschütz nach t_1 Sekunden. Ein zweiter Schuss mit anderer Ladung (Anfangsgeschwindigkeit) und doppelter Elevation trifft die Spitze des Burgturmes nach t_2 Sekunden. Wie hoch ist der Burgturm und wie weit ist er entfernt?*

Die Unbekannten des Problems sind also die Höhe H des Turmes, seine Entfernung W zum Geschütz, außerdem die beiden Abgangsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 . Eine weitere von den obigen Größen abhängig Unbekannte ist die erste Elevation Θ , die aber wegen $\tan[\Theta] = H/W$ mit der Höhe und Entfernung des Turmes verknüpft ist. Somit ergeben sich folgende Bedingungen

$$\begin{aligned}v_1 \cos[\Theta] t_1 &= W, \\v_2 \cos(2\Theta) t_2 &= W, \\v_1 \sin[\Theta] t_1 - g t_1^2/2 &= 0, \\v_2 \sin(2\Theta) t_2 - g t_2^2/2 &= H, \\W \sin[\Theta] &= H \cos[\Theta].\end{aligned}$$

Wir haben so fünf Gleichungen für fünf Unbekannte. Die einzige physikalisch sinnvolle Lösung lautet

$$v_1 = \frac{g t_1 t_2}{\sqrt{2(t_2^2 - t_1^2)}}, \quad v_2 = \frac{1}{2} g t_2 \sqrt{\frac{t_2^2 + t_1^2}{t_2^2 - t_1^2}} \quad (3.32)$$

sowie

$$H = \frac{1}{2} g t_1^2, \quad W = \frac{1}{2} g t_1^2 \sqrt{\frac{t_2^2 + t_1^2}{t_2^2 - t_1^2}}. \quad (3.33)$$

Damit ist auch diese Aufgabe vollständig erledigt. Der erste Elevationswinkel ergibt sich natürlich aus der Relation

$$\tan[\Theta] = \sqrt{\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2 + t_1^2}}.$$

Wie allerdings C. CRANZ auf diese Aufgabe gekommen ist, bleibt im Dunkeln.

4 Die klassische Ballistik mit Luftwiderstand

Seit I. NEWTON wissen wir, dass der Luftwiderstand bei höheren Geschwindigkeiten bis knapp unterhalb der Schallgeschwindigkeit in guter Näherung proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit sein muss. In der hydrodynamischen Theorie spielt hier die Reynoldszahl der Strömung um die Körperoberfläche (Grenzschicht) eine wichtige Rolle. Auf das quadratische Gesetz werden wir uns im Folgenden auch beschränken.

4.1 Integration der Grundgleichungen

Die idealisierten Bewegungsgleichungen eines Projektils *mit Eigenbeschleunigung* a und einem reinen Luftwiderstandsgesetz der Form $k v^2$ lauten dann

$$\ddot{x} = (a - k v^2) \frac{\dot{x}}{v}, \quad (4.1)$$

$$\ddot{y} = (a - k v^2) \frac{\dot{y}}{v} - g, \quad (4.2)$$

wo $k \equiv k_D$ ein *Luftwiderstandsbeiwert* (*drag force*) der Dimension einer inversen Länge ist. Für die Geschwindigkeit gilt $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Die eventuell vorhandene Eigenbeschleunigung a (**Base Bleed Geschoss; Rakete**) wirkt hier immer längs der momentanen Bahntangente. Zunächst werden wir diese Eigenbeschleunigung aber Null setzen. Schon hier sieht man, dass Raketenballistik und klassische Ballistik fließend ineinander übergehen. Reine Raketenballistik werden wir in einem späteren Kapitel behandeln. Die Gravitation wird als konstant und die Erde als eben angesehen. Multipliziert man die erste Gleichung mit \dot{x} , die zweite mit \dot{y} und addiert beide, so gilt wegen

$$\frac{d}{dt}(v^2) = 2v \dot{v} = 2(\dot{x} \ddot{x} + \dot{y} \ddot{y}) \quad (4.3)$$

die erste Grundgleichung

$$v \dot{v} + k v^3 + g \dot{y} = 0. \quad (4.4)$$

Berücksichtigen wir nun die elementaren Beziehungen

$$\dot{x} = v \cos[\theta]; \quad \dot{y} = v \sin[\theta], \quad \dot{x} \ddot{y} - \dot{y} \ddot{x} = v^2 \dot{\theta} \quad (4.5)$$

so lässt sich (4.4) auch schreiben als

$$\dot{v} + k v^2 + g \sin[\theta] = 0. \quad (4.6)$$

Aus dieser Gleichung folgt für die ballistische Kurve die Existenz eines Punktes **M** *minimaler Geschwindigkeit*. Denn aus $\dot{v} = 0$ folgt sofort

$$\sin[\theta_m] = -\frac{k v^2}{g} \quad (4.7)$$

Da die Größe $\sin[\theta_m]$ immer negativ ist, muss der Punkt **M** bei antriebslosem Flug stets hinter dem Gipfelpunkt (*Vertex*) auf dem absteigenden Ast der ballistischen Kurve liegen. Nur bei der Parabel und beim Senkrechtsschuss sind Gipfelpunkt und **M** identisch.

Wird andererseits die erste Gleichung von (4.1) mit \dot{y} , die zweite mit \dot{x} multipliziert und dann die zweite von der ersten subtrahiert, so gilt zunächst

$$\ddot{x} \dot{y} - \ddot{y} \dot{x} = g \dot{x} \quad (4.8)$$

und wegen (4.5) schließlich

$$v \frac{d\theta}{dt} + g \cos[\theta] = 0. \quad (4.9)$$

Die beiden Gleichungen (4.6) und (4.9) sind die beiden Fundamentalgleichungen der ballistischen Kurve, nun aber in den Größen v , der Bahngeschwindigkeit, und dem Tangentenwinkel θ der Bahnkurve. Beide Gleichungen lassen sich auch dynamisch einfach interpretieren. Die Gleichung (4.6) beschreibt die Kräftebilanz in tangentialer Richtung an der Bahnkurve, die Gleichung (4.9) normal zur Kurve. Das letztere sieht man ein, wenn man die Bogenlänge s der Bahnkurve

$$ds = v dt \quad (4.10)$$

einführt. Dann kann man (4.9) auch schreiben als

$$v^2 \frac{d\theta}{ds} + g \cos[\theta] = 0. \quad (4.11)$$

Die Größe $ds/d\theta$ stellt aber bis auf das Vorzeichen den Krümmungsradius der Bahnkurve dar, so dass die Gleichung (4.11) das Gleichgewicht zwischen Zentrifugalbeschleunigung und der Normalkomponente der Erdbeschleunigung dargestellt. Auf ähnliche Weise kann man auch bei der Bewegung einer Testmasse um einen Zentralkörper nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz zeigen, warum dieser Körper „schwereelos“ ist. Für eine Kreisbahn ist dies natürlich trivial.

Die Bogenlänge spielt bei der Theorie der ballistischen Kurve eine wichtige Rolle, denn wegen (4.10) kann man (4.5) auch als

$$\begin{aligned} dx &= \cos[\theta] ds \\ dy &= \sin[\theta] ds \end{aligned} \quad (4.12)$$

schreiben. Wäre hier die Bogenlänge s als Funktion des Winkels θ bekannt, so ergeben die obigen Gleichungen nach einer Quadratur die ballistische Kurve. Diese Idee ist tatsächlich durchführbar.

Die erste Bewegungsgleichung (4.1) lässt sich wegen (4.5) umschreiben in

$$\frac{d}{dt}\{v \cos[\theta]\} + k v \{v \cos[\theta]\} = 0. \quad (4.13)$$

oder mit $ds = v dt$

$$\frac{d}{ds}\{v \cos[\theta]\} + k \{v \cos[\theta]\} = 0. \quad (4.14)$$

Aus dieser Gleichung folgt der wichtige Satz, dass in einer ballistischen Kurve mit quadratischem Widerstandsgesetz die horizontale Geschwindigkeitskomponente exponentiell mit der Bogenlänge der Bahn abnimmt. Dies gilt aber nur bei einem quadratischen Widerstandsgesetz. Hat am Scheitelpunkt der Bahn die Kanonenkugel die horizontale Geschwindigkeit \dot{x}_S , so gilt bei einem quadratischen Luftwiderstand

$$\dot{x} = \dot{x}_S e^{-k s}, \quad (4.15)$$

wobei die Bogenlänge der Bahn vor dem Scheitelpunkt negativ, nach dem Scheitelpunkt positiv gezählt wird.

Mit der Abkürzung

$$u = v \cos[\theta] \quad (4.16)$$

lautet die obige Relation am Abschussort

$$u[s] = v_0 \cos[\Theta] e^{-k s}, \quad (4.17)$$

wo Θ jetzt den Elevationswinkel am Abschussort $s = 0$ und v_0 die Abschussgeschwindigkeit bedeuten.

Wir wollen jetzt eine einzige Differentialgleichung für $v[\theta]$ ableiten. Dazu schreiben (4.6) nach der Kettenregel

$$\frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + k v^2 + g \sin[\theta] = 0. \quad (4.18)$$

Eliminieren wir hier die Größe $d\theta/dt$ mit Hilfe von (4.9), so erhalten wir die fundamentale Gleichung

$$\boxed{g \frac{dv}{d\theta} - \frac{k v^3}{\cos[\theta]} - g v \tan[\theta] = 0.} \quad (4.19)$$

Dieser Typ von Differentialgleichung ist charakteristisch für ein ballistisches Problem. Es erweist sich hier als günstig, wieder die Geschwindigkeit u über Grund einzuführen. Mit $v = u/\cos[\theta]$ führt dies schließlich zu der *Bernoullischen Differentialgleichung*¹

$$\boxed{g \cos[\theta]^3 \frac{du}{d\theta} = k u^3.} \quad (4.20)$$

Wir führen nun die Steigung p der Bahnkurve gemäß

$$p = \tan[\theta]; \quad \cos[\theta] = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}; \quad d\theta = \frac{dp}{1+p^2} \quad (4.21)$$

ein. Damit lautet die Gleichung für u

$$g \frac{du}{dp} = k \sqrt{1+p^2} u^3. \quad (4.22)$$

¹Benannt nach JACOB BERNOULLI, der sie 1695 diskutiert hat. Normalform $y' + p[x]y = q[x]y^n$.

oder nach Division durch u^3

$$g \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{u^2} \right) + 2k \sqrt{1+p^2} = 0. \quad (4.23)$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung ist integrabel und liefert $u = v \cos[\Theta]$ als Funktion des Parameters p . Man erhält dann durch direkte Integration

$$\boxed{\frac{g/k}{u^2[p]} + p \sqrt{1+p^2} + \operatorname{arcsinh}[p] = C.} \quad (4.24)$$

Die Integrationskonstante C wird durch die Anfangsbedingung bestimmt. Die transzendente Gleichung (4.24) stellt so den **Hodographen** der einfachen ballistischen Kurve bei quadratischem Luftwiderstand dar². Denn es gilt wegen $p = \dot{y}/\dot{x}$ auch

$$\frac{g/k}{\dot{x}^2} + \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)^2} + \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) = C. \quad (4.25)$$

Am Scheitelpunkt der ballistischen Kurve ist die vertikale Geschwindigkeitskomponente $\dot{y}_S = 0$. Bezeichnet man dann die dortige Horizontalgeschwindigkeit mit \dot{x}_S , so gilt für den Hodographen

$$\left(\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}}{\dot{x}_S} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}}{\dot{x}} \right)^2 + \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)^2} + \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right). \quad (4.26)$$

Diese exakte Formel für den Hodographen der Wurfbewegung benutzte J.H. LAMBERT 1767 zur Konstruktion einer **échelle ballistique**, eine Art „Nomogramm“ ähnlich einem „Rechenschieber“ zur Berechnung ballistischer Kurven ([30]). Ist die Funktion $u[p]$ einmal bekannt, kann

²Dieses wichtige Integral des ballistischen Problems war schon J. BERNOULLI 1719 bekannt, wurde dann 1745 von L. EULER und 1766 von J.H. LAMBERT neu abgeleitet. 2012 hat im Wettbewerb „Jugend forscht“ der Abiturient SHOURYYA RAY diese Gleichung neu gefunden, was in der Weltpresse als etwas übertriebene Sensation dargestellt wurde.

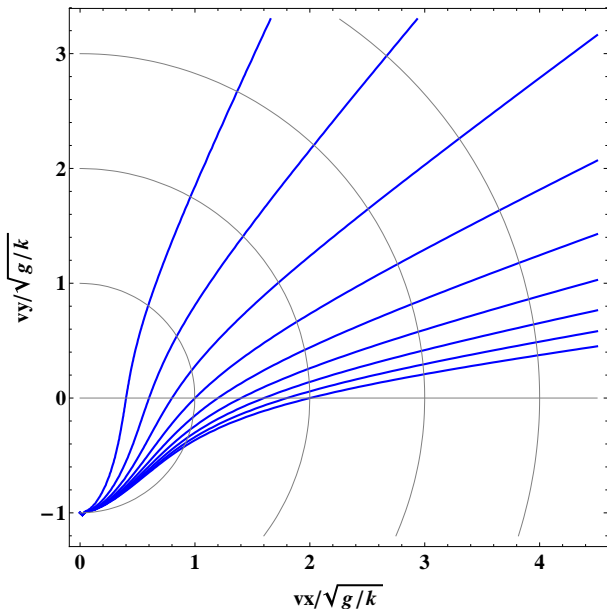


Fig. 4.1: Der Hodograph (4.26) der ballistischen Wurfbewegung mit quadratischem Widerstandsgesetz als Funktion verschiedener Werte der Scheitelpunktgeschwindigkeit v_x bei $v_y = 0$. Alle Geschwindigkeiten sind in Einheiten von $\sqrt{g/k}$. Alle Kurven enden bei der skalierten konstanten Fallgeschwindigkeit -1 .

die ballistische Kurve in *parametrischer Form* berechnet werden. Mit Hilfe von (4.9) folgt das Zeitdifferential

$$dt = -\frac{1}{g} \frac{u d\theta}{\cos^2[\theta]} = -\frac{1}{g} u[p] dp. \quad (4.27)$$

und daraus die Bahnkurve

$$dx = -\frac{1}{g} u^2[p] dp; \quad dy = -\frac{1}{g} p u^2[p] dp. \quad (4.28)$$

Mit der Definition

$$\mathbf{f}[p] = p \sqrt{1 + p^2} + \ln[p + \sqrt{1 + p^2}] \quad (4.29)$$

gilt dann im Einzelnen

$$dx = -\frac{v_0^2}{g} \frac{\cos[\Theta]^2 dp}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 \{\mathbf{f}[\tan[\Theta]] - \mathbf{f}[p]\}} \quad (4.30)$$

und

$$dy = -\frac{v_0^2}{g} \frac{\cos[\Theta]^2 p dp}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 \{\mathbf{f}[\tan[\Theta]] - \mathbf{f}[p]\}} \quad (4.31)$$

sowie

$$dt = -\frac{v_0}{g} \frac{\cos[\Theta] dp}{\sqrt{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 \{\mathbf{f}[\tan[\Theta]] - \mathbf{f}[p]\}}}. \quad (4.32)$$

Der Winkel Θ bezeichnet jetzt den Abgangswinkel der Kanonenkugel beim Abschuss. Aus der letzteren Gleichung folgt durch Differentiation nach der Zeit eine sehr einfache Differentialgleichung für $p[t]$, auf die wir noch zurückkommen werden. Auch die Gesamtgeschwindigkeit kann wegen

$$v^2 = u^2 (1 + p^2) \quad (4.33)$$

durch

$$v[p]^2 = \frac{v_0^2 \cos[\Theta]^2 (1 + p^2)}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 \{\mathbf{f}[\tan[\Theta]] - \mathbf{f}[p]\}} \quad (4.34)$$

ausgedrückt werden. Mit dieser Gleichung ist es zum Beispiel möglich, den Punkt minimaler Geschwindigkeit längs der ballistischen Kurve zu berechnen.

Damit lässt sich die ballistische Kurve *parametrisch durch Quadraturen* darstellen. Im Prinzip ist dies auch die Lösung, die J. BERNOULLI 1719 als Erster fand. Vom praktischen Nutzen sind diese Differentiale eigentlich nur für die Berechnung der beiden Asymptoten der Kurve. Für den Abstand W_A der *senkrechten Asymptoten* vom Abschussort gilt das Integral

$$W_A = \frac{v_0^2}{g} \int_{-\tan[\Theta]}^{\infty} \frac{\cos[\Theta]^2 dz}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 [\mathbf{f}[\tan[\Theta]] + \mathbf{f}[z]]} \quad (4.35)$$

Im Anhang (A.3) diskutieren wir dieses mathematisch sehr interessante Integral etwas genauer in der komplexen Ebene. Eine Vereinfachung durch

die *Residuenmethode* ist aber leider nicht möglich. Die andere Asymptote ist die rückwärts fortgesetzte Gerade, die eine etwas höhere Elevation als Θ am Abschussort hat.

Die Differentialgleichung (4.23) gilt für den Fall $n = 2$. Im allgemeineren Bernoulli - Fall von 1719 gilt stattdessen ($a = 0$)

$$g \frac{du}{d\theta} \cos[\theta]^{n+1} - c u^{n+1} = 0. \quad (4.36)$$

und in der Variablen p

$$g \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{u^n[p]} \right) + n c \left(\sqrt{1+p^2} \right)^{n-1} = 0. \quad (4.37)$$

Hier sieht man sofort, dass der Fall $n = 1$ trivial ist. Für den Eulerschen Fall $n = 2$ ergibt sich wieder (4.23). Die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ wurden von dem Mathematiker *C.G. Jacobi* 1840 auf elliptische Integrale zurückgeführt. Der französische Mathematiker *J.J. DRACH* (1871-1949), der während des ersten Weltkrieges sich theoretisch mit Ballistik beschäftigte, veröffentlichte 1920 eine Untersuchung, in der alle exakt integrierbaren Fälle eines vorgegebenes Luftwiderstandsgesetzes aufgelistet werden konnten ([19]).

Das Problem der ballistischen Kurve ist ein Musterbeispiel dafür, wie dynamische und geometrische Begriffsbildungen ineinander verwoben sind. Wir wollen jetzt eine einzige Differentialgleichung nur für den Verlauf $y[x]$ der ballistischen Kurve mit quadratischem Widerstandsgesetz herleiten. Nach den vorherigen Überlegungen gilt zunächst

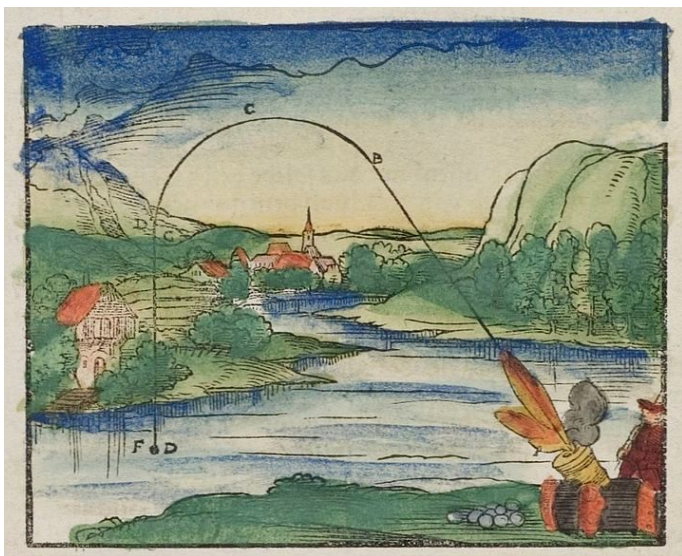
$$u^2 \frac{d\theta}{ds} + g \cos[\theta]^3 = 0. \quad (4.38)$$

Andererseits können wir (4.20) umschreiben in

$$\boxed{g \cos[\theta]^3 \frac{du}{d\theta} = k u^3.} \quad (4.39)$$

oder

$$g \cos[\theta]^3 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{u^2} \right) + 2 k = 0. \quad (4.40)$$



Quelle: Deutsche Fotothek

Fig. 4.2: Eine Illustration aus dem Buch *ARCHITECTUR* von Walther Hermenius Ryff, Nürnberg 1547. Insbesondere hier über die „mathematischen“ und „mechanischen“ Künste. Hier erkennt man noch die alte dreiteilige „Impetushypothese“ aus Gerade – Kreis – Gerade. (Quelle: [wikimedia commons](#))

Wegen (4.38) können wir dies auch

$$u^2 \frac{d\theta}{ds} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{u^2} \right) = 2k \quad (4.41)$$

oder

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{u^2} \right) = 2k \left(\frac{1}{u^2} \right) \quad (4.42)$$

schreiben. Nun gilt in der Kurvengeometrie für den Tangentenwinkel θ und für die Krümmung

$$\tan[\theta] = y'; \quad \cos[\theta] = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}; \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (4.43)$$

Dabei gilt $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$. Setzt man diese Formel in (4.38) ein, so

folgt nach Streichung des gemeinsamen Faktors $\sqrt{1+y'^2}$ die Differentialgleichung der Bahnkurve

$$\frac{1}{u^2} = -\frac{y''}{g}. \quad (4.44)$$

Im Falle $u[x] = \dot{x}[t] = \textit{konstant}$ folgt hieraus die Galileische Wurfparabel als allgemeine Lösung. Der zeitliche Verlauf in der Bahnkurve ergibt sich aus dem Differential

$$dt = \sqrt{-\frac{y''[x]}{g}} dx. \quad (4.45)$$

Die eigentliche Differentialgleichung der Bahnkurve folgt schließlich durch Einsetzen von (4.44) in (4.42). Es gilt wegen $ds = \sqrt{1+y'^2}dx$ eine Differentialgleichung dritter Ordnung³

$$\boxed{y''' = 2k \sqrt{1+y'^2} y''}, \quad (4.46)$$

die mit den Anfangsbedingungen

$$y[0] = 0; \quad y'[0] = \tan[\Theta]; \quad y''[0] = -\frac{g}{v_0^2} \sec[\Theta]^2 \quad (4.47)$$

gelöst werden muss. Auffallend ist hier, dass die Gravitationsbeschleunigung g gar nicht in die eigentliche Differentialgleichung der ballistischen Kurve eingeht, sondern nur durch eine Randbedingung berücksichtigt wird. Schon das erste Integral der obigen Differentialgleichung ist nicht mehr algebraisch, sondern von transzendenter Form und zeigt die ganzen mathematische Schwierigkeiten des ballistischen Problems– z.B. im Vergleich zum Keplerproblem der Planetenbahnbewegung.

Der wichtige *ballistische Koeffizient* k hat die *Dimension einer inversen Länge* und zugleich die physikalische Deutung ($n = 2$)

$$k = \frac{1}{2} c_w(\mathcal{M}) \frac{A \varrho_{Luft}}{m}, \quad (4.48)$$

wo A die Querschnittfläche, ϱ_{Luft} die Dichte der Luft, m die Masse des Projektils und c_w ein Widerstandsbeiwert bedeutet, der von der

³In den Papieren von L. EULER (1745) erscheint sie so noch nicht, dann aber bei J.H. LAMBERT (1766), später auch bei I. DIDION (1848).

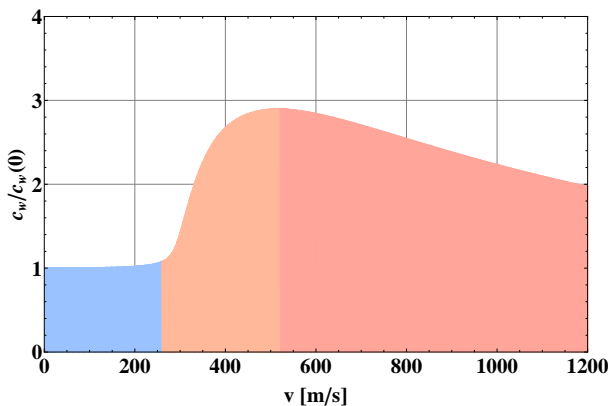


Fig. 4.3: Der Luftwiderstandsbeiwert $c_w(\mathcal{M})$ als Funktion der Geschwindigkeit nach C.J. CRANZ 1910 ([16]). Bis zur Schallgeschwindigkeit ($\approx 340\text{m/s}$) (*subsonic*) ist der Wert konstant, im folgenden Übergangsbereich (*transonic*) stark ansteigend und im Überschallbereich (*supersonic*) fällt der Widerstandsbeiwert in etwa mit dem Potenzgesetz $v^{-1/2}$ ab. Das quadratische Widerstandsgesetz gilt somit streng nur im *subsonischen* Bereich - genauer für **Reynoldszahlen** von 10^3 bis etwa über 10^5 . Im *supersonischen* Bereich gilt eher $k(v) \sim v^{3/2}$. Eine Patronenkugel mit 760m/s Anfangsgeschwindigkeit hält sich nur etwa 1sec im Überschallbereich auf.

Form des Projektils und auch noch von der Geschwindigkeit (Machzahl) abhängen kann. Hier ist es wichtig, ob die Geschwindigkeit unterhalb oder oberhalb der Schallgeschwindigkeit liegt. Heutzutage weiß man, daß die Abbremsung durch drei Faktoren bestimmt wird: Im Überschallbereich durch den „Stoßwellenwiderstand“, dann durch die eigentliche Luftreibung und schließlich durch den „Bodensog“ am hinteren Ende des Geschosses, wo durch den Unterdruck Luftwirbel entstehen.

Eine ballistische Kurve besitzt im Allgemeinen zwei bemerkenswerte Extrempunkte auf ihrer Bahn. Der erste Punkt, der zeitlich kurz *nach* dem Gipfelpunkt (Vertexpunkt) erreicht wird, ist der Punkt *maximaler Krümmung*. Kurz danach folgt der Punkt *minimaler Geschwindigkeit*. Nur bei der reibungsfreien Parabelbahn oder beim Senkrechtschuß mit Luftwiderstand fallen beide Punkte im Vertexpunkt zusammen. Der Punkt x_v *minimaler* Geschwindigkeit folgt sofort aus der Gleichung (4.7)

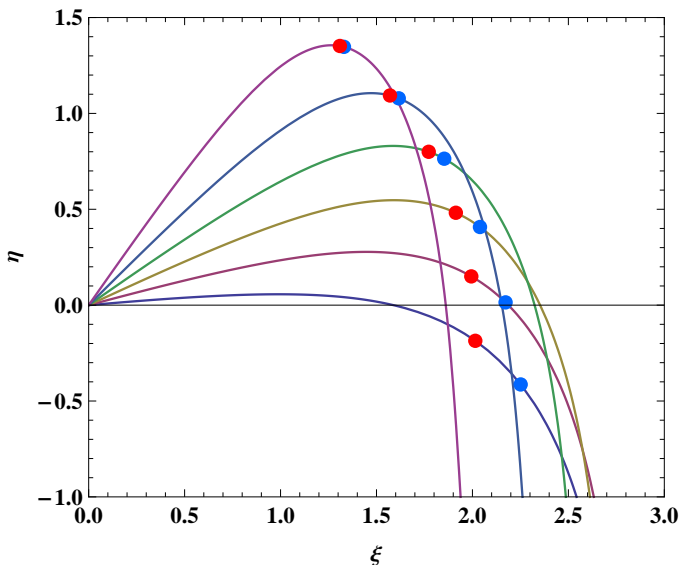


Fig. 4.4: Durch eine numerische Integration errechnete ballistische Kurven mit den Bahnpunkten maximaler Krümmung (rot) und minimaler Geschwindigkeit (blau). Der Parameter $\mu = g/(kv_0^2)$ beträgt hier $1/6$ und die Elevationswinkel gehen in 10er Schritten von 5 bis 55 Grad.

in transformierter Form zu

$$y'[x_v] y''[x_v] = k \left(\sqrt{1 + y'[x_v]^2} \right)^3 \quad (4.49)$$

Ganz analog gilt auch eine Bestimmungsgleichung für den Punkt x_K maximaler Krümmung. Für ihn folgt nach Definition für die Krümmung einer Kurve durch Extremwertbildung

$$y'[x_K] y''[x_K] = \frac{2}{3} k \left(\sqrt{1 + y'[x_K]^2} \right)^3. \quad (4.50)$$

Durch numerische Integration der ballistischen Differentialgleichung (4.46) lassen sich diese Punkte einfach bestimmen (siehe Fig. (4.4)).

4.2 Reihenlösungen nach Euler

Schon im Jahre 1745 hat L. EULER versucht, die ballistische Kurve durch ein Polynom darzustellen. Wir können seine Lösung schnell mit Hilfe der Schlüsselgleichung (4.46) verifizieren. Wir machen einen Reihenansatz der Form

$$y[x] = \tan[\Theta] x - \frac{g}{2 v_0^2} \sec[\Theta]^2 x^2 - \sum_{k=3}^{\infty} c_k x^k \quad (4.51)$$

und bestimmen rekursiv die Koeffizienten c_k . Die so entstehende unendliche Reihe dürfte aber *divergent* sein, wofür aber ein strenger Beweis fehlt. Von diesen Schwierigkeiten zunächst abgesehen ergibt sich so für die *ballistische Kurve* bis zu Termen fünfter Ordnung in x die *semikonvergente Reihendarstellung*

$$\begin{aligned} y[x] = & \tan[\Theta] x - \frac{g}{2 v_0^2} \sec[\Theta]^2 x^2 - \frac{k g}{3 v_0^2} \sec[\Theta]^3 x^3 \\ & - \frac{k g}{12 v_0^4} \{2 k v_0^2 - g \sin[\Theta]\} \sec[\Theta]^4 x^4 \\ & - \frac{k g}{60 v_0^6} \{4 k^2 v_0^4 - 8 k g v_0^2 \sin[\Theta] + g^2 \cos[\Theta]^2\} \sec[\Theta]^5 x^5 - \end{aligned} \quad (4.52)$$

Die höheren Potenzterme in x wachsen in ihrer Länge sehr schnell an. Die ersten beide Terme beschreiben aber die typische „*Wurfparabel*“ nach *Galileo Galilei - Torricelli*, der nächste kubische Term dagegen eine reine Abbremsung und Verkürzung der Bahn im Abstiegsbereich durch die anfängliche Bremsbeschleunigung $k v_0^2$. Der Term vierter Ordnung in x kann aber - je nach den Parametern - sein Vorzeichen wechseln, so dass hier schon eine *divergente* Reihenentwicklung angedeutet wird.

Eine Regularisierung der Reihe ist wohl analytisch ausgeschlossen. Aber man kann versuchen, für die divergente Entwicklung eine Art *Borel'scher Summation*⁴ der ersten dominanten Terme der semikonvergenten Reihe vorzunehmen (*Borel-Transformation*). Zu diesem Zweck betrachten wir

⁴E. BOREL, (1871-1956).

vereinfacht nur die Partialentwicklung

$$y[x] = \tan[\Theta] x - \frac{g}{2 v_0^2} \sec[\Theta]^2 x^2 - \frac{k g}{3 v_0^2} \sec[\Theta]^3 x^3 \\ - \frac{k^2 g}{6 v_0^2} \sec[\Theta]^4 x^4 - \frac{k^3 g}{15 v_0^2} \sec[\Theta]^5 x^5 -$$

Durch Ausklammern von k läßt sich leicht zeigen, dass diese ins Unendliche fortgesetzte Reihe durch den geschlossenen Ausdruck

$$y[x] = \tan[\Theta] x - \frac{g}{4 k^2 v_0^2} \left(e^{2 k \sec[\Theta] x} - 2 k \sec[\Theta] x - 1 \right). \quad (4.53)$$

dargestellt werden kann. Die Näherung stellt sich für alle Parameter k bei relativ kleinen Elevationen Θ als äußerst genau heraus. Wie zu erwarten, sind die Schussweiten bei Flachbahnen etwas unterhalb der exakten Werte.

Mit der obigen analytischen Darstellung kann man auch versuchen, das alte Problem von *Tartaglia*, nämlich die Schussweite als Funktion des Abschusswinkels Θ und der Abschussgeschwindigkeit v_0 unter Einbeziehung des Luftwiderstandes zu berechnen. Euler gibt für dieses Problem 1745 eine Formel an, die aber in realistischen Fällen kaum anwendbar ist. Aus der obigen Darstellung der ballistischen Kurve folgt nämlich durch Umkehrung für die Wurfweite W die asymptotische Reihe

$$W = \frac{v_0^2}{g} \left(\sin[2\Theta] - \frac{4 k v_0^2}{3 g} \sin[2\Theta] \sin[\Theta] + \dots \right) \quad (4.54)$$

In normalen Fällen ist aber $k v_0^2 > g$; also weit ab vom möglichen Konvergenzkreis der obigen Entwicklung. *Euler* gibt auch eine Formel für den Elevationswinkel Θ_m maximaler Wurfweite bei horizontalem Gelände an. Mit Hilfe von Computeralgebra erhält man den asymptotischen Ausdruck

$$\sin[\Theta_m] = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6} \frac{k v_0^2}{g} + O(k^2), \quad (4.55)$$

der mit dem von *EULER* von 1745 übereinstimmt. Allerdings verändert sich der Koeffizient proportional k leicht, wenn man den Polynomgrad der Approximation bei der ballistischen Kurve erhöht. Wir werden im

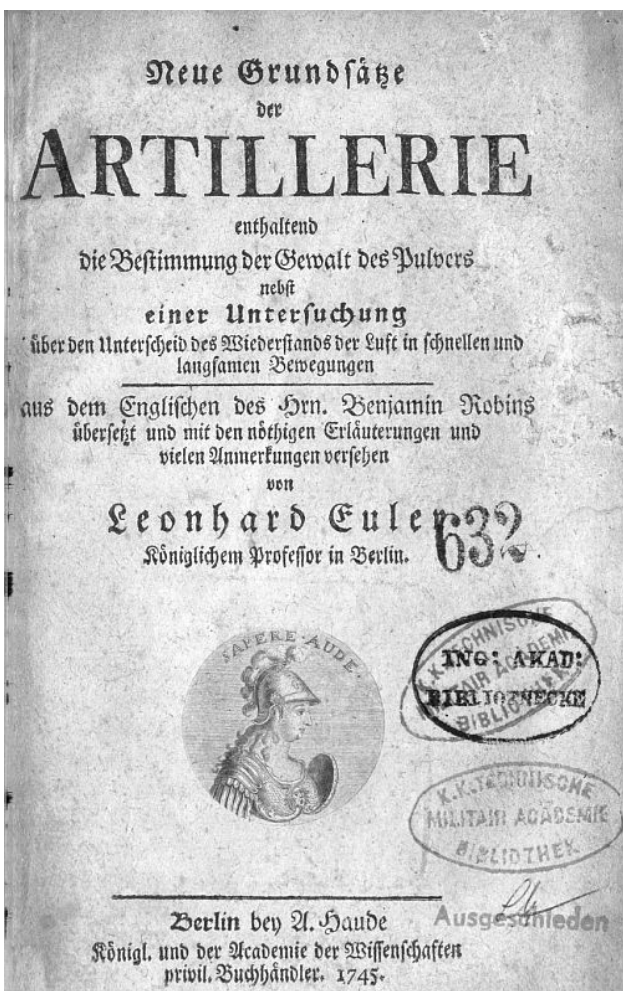


Fig. 4.5: Die erste ausführliche analytische Darstellung einer ballistischen Kurve durch Leonard Euler in seinem Werk „Grundsätze der Artillerie“ von 1745, indem er die experimentellen Resultate von Benjamin Robin aus England in einer physikalischen Theorie mathematisiert. Das Hauptproblem der Lösbarkeit durch Quadraturen wurde schon von J. Bernoulli 1719 in einer Kontroverse mit Newton rein formal gezeigt.

nächsten Kapitel durch numerische Integrationen und eine genauere analytische Untersuchung zeigen, daß in der obigen Reihe (4.55) anstatt des Faktors $1/6 \sim 0.1666$ eher $0.0742 \dots$ stehen muss. Ursache hierfür ist die merkwürdige Tatsache, daß für den fraglichen *numerischen Koeffizienten* der Reihenentwicklung nach k eine *Taylor - Entwicklung* der ballistischen Kurve nicht ausreichend ist.

Euler schließt seine Untersuchungen 1745 mit der Bemerkung:

Deswegen sind wir gezwungen, diese Untersuchung allhier abubrechen, und wollen wir dem Autori⁵ die völlige Ausführung dieser Materie überlassen, als welche er uns in einer besondern Schrift nächstens zu liefern versprochen hat.

Doch L. EULER wartete vergebens...

4.3 Reihenentwicklung nach Tempelhof

Die umfangreichsten Reihendarstellungen der ballistischen Kurve stammen wohl von G.F. TEMPELHOF⁶, die er 1781 in seinem Buch (siehe Fig. 4.6) darlegte. Er berücksichtigte in seinen Betrachtungen auch schon eine variable Luftdichte mit der Höhe. Die Gleichung (4.9) kann mit (4.17) in die Form

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{g \cos[\theta]^3}{v_0^2 \cos[\Theta]^2} e^{2ks} \quad (4.56)$$

gebracht werden. Dies ist die Hauptgleichung von G.F. TEMPELHOF aus dem Jahre 1781, um entweder exakt die Bogenlänge s der Bahn als Funktion des Tangentenwinkels θ oder umgekehrt genähert den Winkel als Funktion der Bogenlänge in einer Reihe darzustellen ([60]). Der zeitliche Verlauf ist dann durch (4.17) oder

$$\frac{ds}{dt} = v_0 \frac{\cos[\Theta]}{\cos[\theta]} e^{-ks} \quad (4.57)$$

⁵gemeint ist B. ROBINS, London 1742

⁶Georg Friedrich Tempelhof (auch Tempelhoff); (1737-1807). 1791 Gründer der Artillerie Akademie im Palais Tempelhoff in Berlin; 1802 Generalleutnant; 1805 Schwarzer Adler-Orden.

gegeben. Grundlage für TEMPELHOF ist nun diese Differentialgleichung (4.56), die als Lösung den Hodographen der ballistischen Kurve als Funktion der Bogenlänge hat. Mit der dimensionslosen Bogenlänge

$$S = \frac{1}{k} s \quad (4.58)$$

und dem meist kleinen Parameter ($\mu < 1$)

$$\mu = \frac{g}{k v_0^2} \quad (4.59)$$

lautet diese Gleichung dann

$$\frac{d\theta}{dS} = -\mu \frac{\cos[\theta]^3}{\cos[\Theta]^2} e^{2S}. \quad (4.60)$$

Wir lösen sie mit dem Ansatz

$$\theta = \Theta + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu^n (e^{2S} - 1)^n \quad (4.61)$$

Nach Bekanntwerden der c_n ist der Tangentenwinkel der Bahn als Funktion der Bogenlänge bekannt. Mit Hilfe dieser Reihe und (4.12) gelingt es dann, den komplexen Zeiger $\exp(i\theta(S))$ parametrisch als Funktion der Bogenlänge darzustellen. Auf diese Weise folgt

$$\begin{aligned} e^{i\theta(S)} &= e^{i\Theta} - \frac{1}{4} i \mu (e^{2S} - 1) (e^{2i\Theta} + 1) - \\ &\quad \frac{1}{16} \mu^2 (e^{2S} - 1)^2 (2e^{3i\Theta} + e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}) + \dots \end{aligned} \quad (4.62)$$

und nach Integration über die Bogenlänge für die komplexe Bahnkoordinaten $\zeta[S] = \xi[S] + i\eta[S]$

$$\begin{aligned} \zeta[S] &= S e^{i\Theta} - \frac{1}{8} i \mu (e^{2S} - 1 - 2S) (e^{2i\Theta} + 1) \\ &\quad - \frac{1}{64} \mu^2 (e^{4S} - 4e^{2S} + 4S + 3) (2e^{3i\Theta} + e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}) + \dots \end{aligned} \quad (4.63)$$

Diese Reihen sind aber sehr langsam konvergent und man benötigt mindestens Terme bis zur vierten Ordnung in μ , um für moderate Elevationswinkel Θ die Genauigkeit der recht kurzen Lambertschen Funktionsdarstellung (4.125) zu erreichen. G. TEMPELHOF selber berechnete die

LE
BOMBARDIER
PRUSSIEN

OU
DU MOUVEMENT
DES
PROJETILES

*En supposant la résistance de l'air proportionnelle au
quarré des vitesses*

PAR
M. R. TEMPELHOF,

CAPITAINE D'ARTILLERIE AU SERVICE DE SA MAJESTÉ LE ROI
DE PRUSSE.

Opinionum commenta delet dies, naturae judicia confirmat.



A BERLIN, 1781.

Imprimé, au dépens de l'Auteur,
CHEZ CHRÉTIEN SIGISMOND SPENER.

Fig. 4.6: Das Einbandbild des Buches *Le Bombardier Prussien* von G.F. Tempelhof (Tempelhoff) aus dem Jahre 1781. Dieses Buch, in welchem man die umfangreichsten Reihenentwicklungen zur ballistischen Wurfbewegung vorfindet, stellt einen Höhepunkt und Abschluss in der theoretischen ballistischen Forschung des 18. Jahrhunderts dar.

Terme mit den *reellen trigonometrischen Funktionen* bis zur siebenten Ordnung in μ , was ich mit Computeralgebra nachgerechnet habe und dabei keinen Unterschied feststellen konnte. Bis zur dritten Ordnung ergeben sich nämlich aus (4.62) die beiden Entwicklungen

$$\begin{aligned}\cos[\theta] &= \cos[\Theta] - \frac{1}{4} \mu (e^{2S} - 1) \sin[2\Theta] \\ &\quad - \frac{1}{8} \mu^2 (e^{2S} - 1)^2 \cos[3\Theta] \\ &\quad + \frac{1}{96} \mu^3 (e^{2S} - 1)^3 (\sin[2\Theta] - 7 \sin[4\Theta]) \\ &\quad + \dots\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sin[\theta] &= \sin[\Theta] - \frac{1}{4} \mu (e^{2S} - 1) (1 + \cos[2\Theta]) \\ &\quad - \frac{1}{8} \mu^2 (e^{2S} - 1)^2 (\sin[\Theta] + \sin[3\Theta]) \\ &\quad - \frac{1}{96} \mu^3 (e^{2S} - 1)^3 (3 - 4 \cos[2\Theta] - 7 \cos[4\Theta]) \\ &\quad - \dots\end{aligned}$$

Es bleibt aus heutiger Sicht eigentlich rätselhaft, warum das Buch von G.F. TEMPELHOF(F) damals als so fundamental angesehen wurde, da die analytischen Reihenentwicklungen kaum *Nutzen für die damalige praktische Artillerie hatten*. Obwohl zunächst geheimgehalten, berichtete schon 1797 der Astronom und Hauptmann der preußischen Armee JOHANN PHILIPP VON ROHDE über die Untersuchungen von Tempelhoff in seiner eigenen Schrift über das ballistische Problem ([46]).

4.4 Reihenlösungen nach der Zeit

Die klassische Lösung hat den Nachteil, dass sie nur eine *implizite* Darstellung der Bahnkurve in ihrem zeitlichen Verlauf darstellt. Es ist daher wichtig, nach einer alternativen Darstellung des zeitlichen Verlaufs der ballistischen Kurve zu suchen. Erste Versuche in dieser Richtung hat schon G. TEMPELHOF in seinem Werk unternommen, neuere Untersuchungen stammen von G.W. PARKER ([42] und auch R. SHOURYYA

([50]). Die Grundgleichungen des Problem sind wieder

$$\ddot{x} + k \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x} = 0, \quad (4.64)$$

$$\ddot{y} + k \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} + g = 0, \quad (4.65)$$

die mit den Anfangsbedingungen

$$\dot{x}[0] = v_0 \cos[\Theta]; \quad \dot{y}[0] = v_0 \sin[\Theta]. \quad (4.66)$$

durch eine *möglichst einfache Reihenentwicklung* oder Zeitfunktionen t gelöst werden müssen. Aufgrund der Struktur der Gleichungen als ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit einem integrierenden Faktor machen wir den Ansatz

$$\{\dot{x}, \dot{y}\} = v_0 \cos[\Theta] \left\{ \frac{1}{q}, \frac{p}{q} \right\}. \quad (4.67)$$

Durch Einsetzen in die Bewegungsgleichungen erhält man nach Umformungen die neuen bemerkenswerten Gleichungen

$$\dot{p} = -\frac{g}{v_0 \cos[\Theta]} q \quad (4.68)$$

$$\dot{q} = +k v_0 \cos[\Theta] \sqrt{1 + p^2}. \quad (4.69)$$

Dieses bemerkenswerte gekoppelte System muss für eine ballistische Kurve mit den Anfangsbedingungen

$$q[0] = 1, \quad p[0] = \tan[\Theta] \quad (4.70)$$

gelöst werden. Aus beiden gekoppelten Gleichungen folgt leicht

$$\boxed{\ddot{p} + k g \sqrt{1 + p^2} = 0.} \quad (4.71)$$

Diese Schlüsselgleichung folgt auch aus dem Zeitdifferential (4.32) und ist ihr direktes Äquivalent. Sie bestimmt den zeitlichen Verlauf der Bahntangentenneigung am Flugkörper und muss mit den Anfangsbedingungen

$$p[0] = \tan[\Theta]; \quad \dot{p}[0] = -\frac{g}{v_0 \cos[\Theta]} \quad (4.72)$$

gelöst werden. Das Vorzeichen der Wurzel in (4.71) ist von der Orientierung des Geschwindigkeitsvektors abhängig. Der Winkel zwischen der **Zenitrichtung** und der **Geschwindigkeitsrichtung** nimmt zeitlich immer zu.

Mit Standardmethoden erhält man so leicht die Taylorreihen bis zur dritter Ordnung in t

$$p[t] = \tan[\Theta] - \frac{g \sec[\Theta]}{v_0} t - k g \sec[\Theta] \frac{t^2}{2} + \frac{k g^2 \tan[\Theta]}{v_0} \frac{t^3}{6} + \dots \quad (4.73)$$

und

$$q[t] = 1 + k v_0 t - k g \sin[\Theta] \frac{t^2}{2} + \frac{k g (g \cos[\Theta]^2 - k v_0^2 \sin[\Theta])}{v_0} \frac{t^3}{6} - \dots \quad (4.74)$$

Mathematisch sind diese Reihen sehr interessant, aber für realistische Fälle nur langsam konvergent. Für die *praktische* Berechnung von ballistischen Kurven bieten sie so gegenüber der *numerischen Integration* keine wirklichen Vorteile, zumal ja die Positionen des Körpers noch einmal durch eine Quadratur gewonnen werden muss.

Die wichtigste Näherung, die sich aus den obigen Formeln ergeben, nennen wir die sogenannte *Lambertsche Approximation*, da schon J. LAMBERT auf diese im 18ten Jahrhundert gestoßen ist. Sie ist für Flachbahnen der beste Kompromiss zwischen Genauigkeit und analytischem Aufwand. Mit Hilfe der $p[t]$ und $q[t]$ Funktionen erhält man diese Approximation mit Index 1 durch die lineare und quadratische Näherung in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}_1[t] &= \frac{v_0 \cos[\Theta]}{1 + k v_0 t}, \\ \dot{y}_1[t] &= \frac{v_0 \sin[\Theta] - g t - \frac{1}{2} k g v_0 t^2}{1 + k v_0 t}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Durch Integration ergibt sich dann

$$x_1[t] = \frac{1}{k} \cos[\Theta] \ln(1 + k v_0 t), \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} y_1[t] &= \frac{1}{k} \left(\sin[\Theta] + \frac{g}{2 k v_0^2} \right) \ln(1 + k v_0 t) - \\ &\quad - \frac{g}{4 k^2 v_0^2} ((1 + k v_0 t)^2 - 1). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Für Flachbahnen mit Elevationen kleiner etwa 25 Grad sind diese Formeln für einen beliebigen ballistischen Koeffizienten k völlig ausreichend. Aus der ersten Gleichung für $x[t]$ können wir zudem die Zeit t eliminieren und in die zweite Einsetzen. Dann erhalten wir die rein algebraische Kurvengleichung

$$y_1[x] = \tan[\Theta] x - \frac{g}{4 k^2 v_0^2} \left(e^{2 k \sec[\Theta] x} - 2 k \sec[\Theta] x - 1 \right). \quad (4.78)$$

Diese bemerkenswerte Gleichung ist für *flache Flugbahnen* eine sehr gute Näherung und entspricht unserer Approximation bei der Summation von einem analytischen Teil der Eulerschen Reihe (4.53). Die Wurfweite ist in allen Fällen wenige Prozent zu kurz.

4.5 Alternative Approximationen

Die Lösung (4.78) für ballistische Flachbahnen wurde in ähnlicher Form schon von J.H. LAMBERT 1765, später von DIDION 1860 und schließlich von CRANZ in seinem Kompendium 1896 angegeben. Wie man leicht feststellen kann, erfüllen die Geschwindigkeitsfunktionen (4.75) die *halb entkoppelten* Differentialgleichungen ($\dot{x}_1 > 0$)

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -k \sec[\Theta] \dot{x}_1^2, \\ \ddot{y}_1 &= -k \sec[\Theta] \dot{x}_1 \dot{y}_1 - g. \end{aligned}$$

Diese Bewegungsgleichungen folgen aus den exakten Gleichungen, indem man bei den häufig vorkommenden Flachbahnen den Term \dot{y}^2 im Wurzelausdruck für die Gesamtgeschwindigkeit vernachlässigt, dafür aber einen modifizierten *effektiven ballistischen Koeffizienten* $k_{eff} \rightarrow k \sec[\Theta]$ einführt, der den Luftwiderstand zu Beginn exakt und am Ende der Bewegung genähert beschreibt, aber um den Gipfelpunkt der Bahn leicht überschätzt. Die Flugbahnen sollten also alle etwas zu kurz ausfallen. Es ist nun interessant, diese sehr gute approximative Lösung einerseits mit der exakten numerischen Lösung der Bahnkurve, andererseits aber auch mit den naiven Lösungen der alternativen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= -k \dot{x}_2^2, \\ \ddot{y}_2 &= -k \dot{x}_2 \dot{y}_2 - g. \end{aligned}$$

zu vergleichen. Diese ergeben sich direkt ohne Korrekturterm durch Vernachlässigung des \dot{y}^2 Terms in der Wurzel von $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Für diese Approximation lauten die Lösungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_2[t] &= \frac{v_0 \cos[\Theta]}{1 + k v_0 \cos[\Theta] t}, \\ \dot{y}_2[t] &= \frac{v_0 \sin[\Theta] - g t - \frac{1}{2} k g v_0 \cos[\Theta] t^2}{1 + k v_0 \cos[\Theta] t}.\end{aligned}\quad (4.79)$$

Durch Integration ergibt sich

$$x_2[t] = \frac{1}{k} \ln(1 + k v_0 \cos[\Theta] t), \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned}y_2[t] &= \frac{1}{k} \left(\tan[\Theta] + \frac{g \sec[\Theta]^2}{2 k v_0^2} \right) \ln(1 + k v_0 \cos[\Theta] t) - \\ &\quad - \frac{g \sec[\Theta]^2}{4 k^2 v_0^2} ((1 + k v_0 \cos[\Theta] t)^2 - 1).\end{aligned}\quad (4.81)$$

Für die ballistische Kurve ergibt sich in dieser Approximation

$$y_2[x] = \tan[\Theta] x - \frac{g \sec[\Theta]^2}{4 k^2 v_0^2} (\exp[2 k x] - 2 k x - 1). \quad (4.82)$$

Durch Vergleich mit einer numerischen Integration der exakten Gleichungen lässt sich die Güte der zwei Approximationen relativ leicht prüfen. Mit den Skalierungen

$$\{k x, k y\} = \{\xi, \eta\}; \quad \tau = \sqrt{g k} t; \quad (4.83)$$

und dem Parameter

$$\nu = \frac{k v_0^2}{g} \quad (4.84)$$

wurden so für vier unterschiedliche Elevationen mit $\nu = 25$ Simulationen durchgeführt. Die Abbildungen (4.7,4.8) zeigen die sehr gute analytische Approximation der ballistischen Kurve durch die Funktion $(x_1[t], y_1[t])$ (rote Punkte). Der Verlauf von $(x_2[t], y_2[t])$ (blaue Punkte) ist deutlich schlechter. Beide Approximationen werden schlechter, wenn der Elevationswinkeln größer als 25 Grad ist. Dagegen spielt die Größe des Parameters ν kaum eine Rolle.

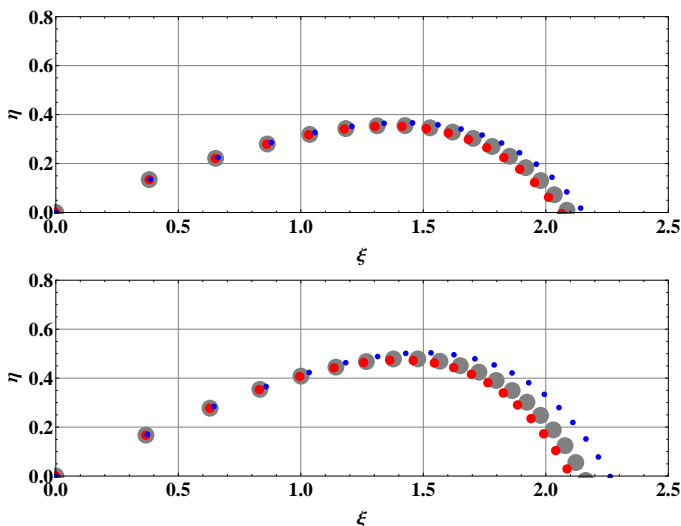


Fig. 4.7: Vergleich einer numerischen Integration der Differentialgleichung (4.117) (graue Scheiben) mit den analytischen Formel (4.76, 4.77) (rote Scheiben) und (4.80, 4.81) (blaue Scheiben) im Falle $kv_0^2/g = 25.0$ (Starke Luftreibung). Die Längeneinheit sind $(\xi, \eta) = k(x, y)$. In der oberen Graphik ist der Elevationswinkel 20, in der unteren 25 Grad. Die Zeitschritte sind $\Delta\tau = 0.1$.

Zu Ende des 18. Jahrhunderts war diese relativ einfache *asymptotische* Theorie von J.H. LAMBERT für die ballistische Kurve so gut wie unbekannt. Einerseits ließt man in der Enzyklopädie des Christian Freyherrn von WOLFF (1679 - 1754) sehr kritisches über die Wurfparabel: *Neue Ausgabe aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften*, Marburg, 1797, Kapitel Anfangsgründe der Artillerie (redigiert von J.T. MAYER, Seite 757):

*Diese Lehren von der parabolischen Bahn der Geschützku-
geln würden bey der Anwendung ihre vollkommene Richtigkeit
haben, wenn keine Widerstand der Luft in Betrachtung zu
ziehen wäre. Allein dieser verursacht, daß die obigen Leh-
ren in der Ausübung sehr große Einschränkung leiden. Nur
in einem luftleeren Raume würden die Bahnen der geworfe-
nen Körper vollständig parabolisch seyn., aber in der Luft*

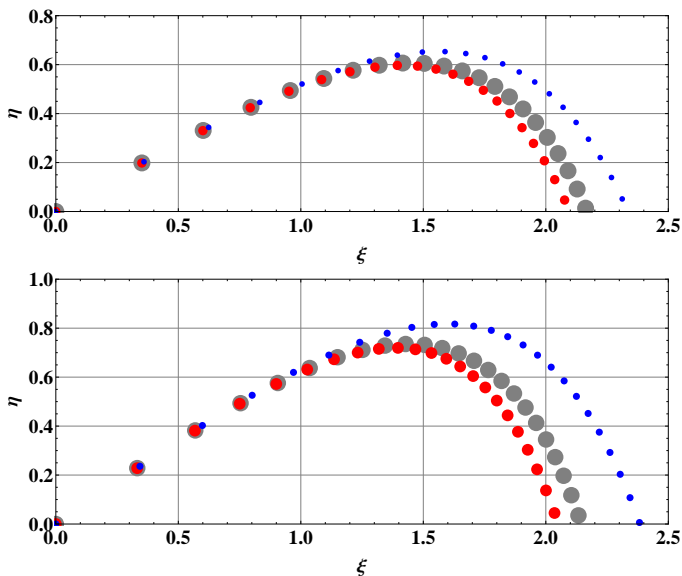


Fig. 4.8: Vergleich einer numerischen Integration der Differentialgleichung (4.117) (graue Scheiben) mit der genäherten analytischen Formel (4.76) , (4.77) (rote Scheiben) und (4.80, 4.81) (blaue Scheiben) im Falle $kv_0^2/g = 25.0$ (Starke Luftreibung). Die Längeneinheiten sind $(\xi, \eta) = k(x, y)$. In der oberen Graphik ist der Elevationswinkel 30, in der unteren 35 Grad. Die Zeitschritte sind $\Delta\tau = 0.1$.

selbst weichen sie desto mehr von einer Parabel ab, je größer die Geschwindigkeit der geworfenen Körper, und folglich der Widerstand der Luft ist. Daher obige Theorie einer großen Verbesserung bedarf, wenn sie in der Ausübung zutreffen soll. Bey dem Werffen der Kanonenkugeln kann sie fast gar nicht angewendet werden, weil diese nämlich gewöhnlich eine große Geschwindigkeit haben. Eher lässt sie sich beym Werffen der Bomben anwenden, welche gewöhnlich keine sehr große Geschwindigkeit haben, und man begnügt sich daher bey jenen mit der parabolischen Theorie, so lange man keine bessere für die Ausübung hat. Denn wenn gleich die größten Mathematiker sich damit beschäftigt haben, [...] so fehlt diesen

Bemühungen doch noch gar vieles zur wirklichen Ausübung. Man kann indessen hierüber vorzüglich die oben angeführten Schriften von Robins, Euler, d'Árcy, Tempelhof nachlesen...

Ein weiteres Zitat gibt uns 1811 der Major C.F. SEYDELL in seinem Buch über den Gebrauch des kleinen Gewehres auf Seite 233 ([49]):

Das Gesetz, nach welchem die Bahn der Kugel etwa zu bestimmen seyn möchte, kann hier nicht vorgetragen werden, indem es zu den schwierigsten mathematischen Problemen gehöret, und nach allen bisherigen Versuchen großer Mathematiker noch nicht zu allgemeiner Zufriedenheit aufgelöst worden ist.

Schade, dass für diesen Gegenstand auch im Praktischen so wenig geleistet worden ist! Außerdem, was in dem 3ten Bande des Handbuchs des Herrn General von Scharnhorst über diesen Gegenstand vorkommt, ist mir kein Werk bekannt, worin man aus Versuchen etwas Bestimmtes über die Bahn der Kugel angegeben hätte.

Und sucht man weiter in einer alten Bibliothek, so liest man bei G. VON SCHARNHORST (1755 - 1813): *Über die Wirkung des Feurgewehrs*. Für die Königlich preussischen Kriegs - Schulen, Berlin 1813, in Paragraph 12:

Man siehet hieraus, dass die parabolische Theorie auf alle Distanzen und bei allen Ladungen, welche bei den gewöhnlichen Mörsern in einer Belagerung vorkommen, sich anwenden lässt; und da die Anwendung der übrigen Theorien weitläufige Berechnungen erfordert und keine größere Genauigkeit leistet, so kann man sie völlig entbehren.

Erst der französische General ISIDORE DIDION beschreibt in seiner *Traité de ballistique* von 1848 und in der Zweitausgabe 1860 die ballistische Kurve sehr konsequent nicht mehr als Parabel, sondern durch die asymptotische Darstellung (4.78) . Man hatte nun erkannt, dass beim Annähern an die Schallgeschwindigkeit der Luftwiderstand *nicht genau* nach dem quadratischen Gesetz verläuft und eine asymptotische Theorie zur genäherten Beschreibung von ballistischen Flachbahnen völlig ausreichend ist.

Zunächst kann die Flugzeit T der „Kanonenkugel“ bei einem horizontalen Gelände abgeschätzt werden. Mit (4.76) ergibt sich für die Flugzeit bei vorgegebener Wurfweite W

$$T = \frac{1}{k v_0} \left(e^{k W \sec[\Theta]} - 1 \right) \quad (4.85)$$

Diese Gleichung war auch schon J.H. LAMBERT bekannt. Um mit Hilfe der asymptotischen Lambertschen Formel (4.78) die für *praktische Anwendung* wichtige Wurfweite (Schussweite) in einem horizontalen Gelände bei Flachbahnen *abzuschätzen*, muss man die nichttriviale Wurzel W oder für die Rohrerhöhung den Winkel Θ der transzendenten Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = & \left(\tan[\Theta] + \frac{g \sec[\Theta]}{2 k v_0^2} \right) W - \\ & - \frac{g}{4 k^2 v_0^2} \left(\exp [2 k \sec[\Theta] W] - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.86)$$

bestimmen. Die Auflösung nach W gelingt relativ einfach durch Einführung einer neuen transzendenten Funktion, die in der Literatur als *Produktlogarithmus* oder *Lambertsche* $\mathbf{W}[z]$ Funktion bezeichnet wird.⁷ Diese Funktion erfüllt die Gleichung

$$\mathbf{W}[z] e^{\mathbf{W}[z]} = z \quad (4.87)$$

und spielt in der mathematischen Physik eine wichtige Rolle. Die Funktion besitzt im Intervall $z \in (-1/e, 0)$ zwei Äste, die mit $\mathbf{W}_0[z]$ und $\mathbf{W}_{-1}[z]$ bezeichnet werden. Für das ballistische Problem benötigen wir den zweiten Funktionsast. Mit den Hilfsvariablen

$$\begin{aligned} \beta &= 1 + 2 \frac{k v_0^2}{g} \sin[\Theta] \\ X &= 2 k \sec[\Theta] W \end{aligned} \quad (4.88)$$

lautet die transzendente Gleichung (4.86)

$$X = \ln[1 + \beta X]. \quad (4.89)$$

⁷Hierzu muss bemerkt werden, dass J.H. Lambert selber nie diese nach Ihm benannte $\mathbf{W}[z]$ Funktion auf das ballistische Problem angewendet hat.

Θ°	$\mu = 0.1$	$\mu = 1.0$	$\mu = 10.0$
5	0.87991	0.15604	0.01717
10	1.23594	0.28073	0.03343
15	1.44232	0.38005	0.04838
20	1.57045	0.45779	0.06160
25	1.64604	0.51648	0.07278
30	1.68109	0.55786	0.08166
35	1.68205	0.58318	0.08804
40	1.65276	0.59333	0.09179
45	1.59563	0.58901	0.09284
50	1.51223	0.57077	0.09118

Tab. 4.1: Die dimensionslos skalierte fünfstellige Wurfweite kW als Funktion des Elevationswinkels Θ und dreier Parameterwerte $\mu \equiv g/(kv_0^2)$. Die Zahlen sind in der siebten Stelle nicht gerundet und wurden durch genaue numerische Integration der Differentialgleichung (4.117) gewonnen.

Die Lösung dieser transzendenten Bedingung ist

$$X = -\mathbf{W}_{-1} \left(-\frac{e^{-1/\beta}}{\beta} \right) - \frac{1}{\beta}. \quad (4.90)$$

Durch Einsetzen der Wurfweite W in (4.85) und Umformung ergibt sich so

$$T = \frac{1}{kv_0} \left(\sqrt{-\beta \mathbf{W}_{-1} \left(-\frac{e^{-1/\beta}}{\beta} \right) - 1} \right) \quad (4.91)$$

Damit sind wesentliche dynamischen Größen der ballistischen Kurve in dieser Näherung bekannt. Die obige Formel für die Wurfweite W ist zwar exakt, aber nur im Sinne der *Lambertschen* Approximation erster Ordnung für flache Elevationswinkel $\Theta < 25^\circ$.

Mit dieser asymptotischen Formel ist ein praktisches Problem von L. EULER aus dem Jahre 1745 gelöst. In der Tabelle (4.1) sind einige Wurfweiten mit drei unterschiedlichen Parametern $\mu = g/(kv_0^2)$ als Standard mit hoher *akademischer* Genauigkeit durch numerische Integration berechnet worden. An diesen Zahlenwerten muss sich jede genäherte analytische Formel messen lassen. Durch die Unsicherheiten im ballistischen Koeffizienten $k(\mathcal{M})$ bleiben die Ergebnisse natürlich rein „*akademisch*“.

Die Wurfweitenformel in dem 1781 zunächst unter Verschluss gehaltenem Buch *Le Bombadier Prussien* von G.F. TEMPELHOF sind allerdings noch komplizierter als die Obige und in der Praxis wohl nie verwendet worden. Ein interessanter Zeitzeuge zu diesem Problemkreis war der Astronom F. X. VON ZACH (1754-1832), Direktor der Sternwarte auf dem Seeberg bei Gotha. Anonym rezensierte er eine neuere ballistische Untersuchung des Mathematikers J.F. HENNERT aus Utrecht. Unter der Rubrik *Kriegswissenschaft* liest man in der *Allgemeine Literatur - Zeitung* von 1796:([67])

„Die vierte Abhandlung handelt von der Wurfweite der Bomben. Seit Newton und Euler haben die Geometer nicht aufgehört, sich mit dieser ballistischen Aufgabe zu beschäftigen. Die Arbeiten eines Bezour, Borda, Legendre sind bekannt; allein nach der vollständigen Ernte, die der berühmte General v. Tempelhof auf diesem Felde gehalten hat, bleibt nicht mehr viel zur Nachlese übrig. Die Auflösung, die uns dieser gelehrte Mann in seinem „Bombardier prussien“ von dieser Aufgabe gegeben hat, ist ganz neu, und hängt mit keiner der bekanntgemachten zusammen.

So glänzend aber auch alle diese Untersuchungen sind, so finden sich doch hin und wieder in der Ausführung eigene Schwierigkeiten, und sie stimmen nicht immer mit den Erfahrungen und den angestellten Versuchen überein. Unser Vf.(HENNERT), der in tiefen mathematischen Kenntnissen niemanden nachsteht, hat sich daher auch an dieses Problem gewagt, und er gibt davon zwei sehr kurze Auflösungen, die in der wirklichen Ausübung beim Bombenwurf genau genug scheinen. Was die Bewegung der Kanonenkugel betrifft, so ist ihm seine Untersuchung nur bis zu einer Elevation, die nicht über 20 Grade geht, geglückt. Der Fall trifft wohl auch selten, daß man Kanonen über 30 Grade hochrichtet; auch können die Schüsse bei einer solchen Erhöhung nicht genau beobachtet werden.

Um seine Leser nicht auf die Elementarwerke über diesen Gegenstand zu verweisen, so wiederholt der gelehrte Vf. hier

kürzlich die ersten Anfangsgründe der Ballistik in einem widerstehenden Mittel, der Luft, und setzt alsdann seine Untersuchungen weiter fort: Die Grenzen einer Rezension erlauben uns nicht, den Vf. hierin weiter zu verfolgen, allein auf des Eigentümliche der Auflösung müssen wir den Leser aufmerksam machen. Dahin gehört vorzüglich die §9. angegebene Approximationsmethode. Die Geometer, die bisher durch eine einzige Kurve, oder durch ihre einzige Gleichung, die Bewegung der Körper in einem widerstehenden Medio ausdrücken wollten, haben sich von der Wahrheit zu weit entfernt. Unser Vf. betrachtet den aufsteigenden Zweig (Branches) dieser krummen Linie ganz getrennt; er zeigt, wie man den aufsteigenden Zweig der Kurve im widerstehenden Medio durch eine Annäherung die Parabel finden könne, und beweist nachher, dass der absteigende Zweig dieser Kurve dem aufsteigenden nicht ähnlich sei, und gibt für diesen Zweig eine zweite Annäherung durch die Parabel.

So weit ein Ausschnitt der Rezension. Die von HENNERT benutzte Approximation war übrigens keineswegs besser als die von LAMBERT. Trotzdem zeigt der obige Artikel in einer Literaturzeitung, wie populär das ballistische Problem gegen Ende des 18. Jahrhunderts noch war.

4.6 Numerische Integration

Da das ballistische Problem selbst im engeren Sinne ein schwieriges analytisches Problem darstellt, können die entsprechenden Differentialgleichungen natürlich recht einfach *numerisch* integriert werden. Zu diesem Zwecke schreiben wir die beiden Bewegungsgleichungen explizit

$$\begin{aligned}\ddot{x} + k \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x} &= 0, \\ \ddot{y} + k \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} + g &= 0\end{aligned}\tag{4.92}$$

oder mit

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}\tag{4.93}$$

einfacher

$$\begin{aligned}\dot{v}_x + k \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_x &= 0, \\ \dot{v}_y + k \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_y + g &= 0.\end{aligned}\quad (4.94)$$

Die naheliegende dimensionslose Skalierung besteht darin, als dimensionslose Zeiteinheit

$$\tau = \sqrt{k/g} t \quad (4.95)$$

einzuführen. Der Geschwindigkeitsvektor wird dann mit der Grenzggeschwindigkeit $\sqrt{g/k}$ gemäß

$$v_x = \sqrt{\frac{g}{k}} v_\xi; \quad v_y = \sqrt{\frac{g}{k}} v_\eta \quad (4.96)$$

skaliert. Auf diese Weise ergeben sich die gekoppelten Gleichungen

$$\begin{aligned}v'_\xi(\tau) + \sqrt{v_\xi(\tau)^2 + v_\eta(\tau)^2} v_\xi(\tau) &= 0, \\ v'_\eta(\tau) + \sqrt{v_\xi(\tau)^2 + v_\eta(\tau)^2} v_\eta(\tau) + 1 &= 0.\end{aligned}\quad (4.97)$$

Führt man noch den Parameter

$$\nu = \frac{k v_0^2}{g} \quad (4.98)$$

ein, welcher das Verhältnis der Bremsbeschleunigung der Luftreibung am Abgangsort zur Erdbeschleunigung darstellt, können die obigen Gleichungen mit den Anfangsbedingungen

$$v_\xi(0) = \sqrt{\nu} \cos[\Theta], \quad v_\eta(0) = \sqrt{\nu} \sin[\Theta]. \quad (4.99)$$

numerisch gelöst werden. Will man auch die Bahnkurve ableiten, so müssen noch zusätzlich die Gleichungen

$$v_\xi - \nu \xi' = 0, \quad v_\eta - \nu \eta' = 0 \quad (4.100)$$

integriert werden. Bei dieser Skalierung ist zu bedenken, dass die physikalischen Koordinaten nun durch die Skalierung

$$x = \frac{v_0^2}{g} \xi, \quad y = \frac{v_0^2}{g} \eta \quad (4.101)$$

gegeben sind.

Auf diese Weise ist es relativ leicht möglich, zu demonstrieren, dass die Relation des Hodographen der ballistischen Kurve

$$\mathbf{C}_H = \frac{1}{v_\xi^2} + \frac{v_\eta}{v_\xi} \sqrt{1 + \left(\frac{v_\eta}{v_\xi}\right)^2} + \operatorname{arcsinh}\left(\frac{v_\eta}{v_\xi}\right) \quad (4.102)$$

ein *Integral* der Bewegung ist. Auch die *Evolute* – das heißt die Ortslinie der Mittelpunkte der Krümmungskreise der ballistischen Kurve – können numerisch nach den Formeln

$$\begin{aligned} \xi_E &= \xi - \frac{v_\eta(v_\xi^2 + v_\eta^2)}{v_\xi v'_\eta - v'_\xi v_\eta} \\ \eta_E &= \eta + \frac{v_\xi(v_\xi^2 + v_\eta^2)}{v_\xi v'_\eta - v'_\xi v_\eta} \end{aligned} \quad (4.103)$$

berechnet werden. In der Figur (4.9) ist eine ballistische **Normalkurve** mit $\mu_H = 1$ und ihre zugehörige Evolute graphisch dargestellt. Ganz grob kann man immer noch die alte Impetushypothese des spätantiken Gelehrten J. PHILOPONOS ($\sim 490 - \sim 575$) aus Alexandria erkennen: Zwei Geraden als Asymptoten und - als spätere Verbesserung - zwischen den beiden ein fast kreisförmiger Übergang. Das hatte I. NEWTON wohl gegen Ende des 17. Jahrhunderts veranlasst, die ballistische Kurve als eine *Hyperbel* aufzufassen.

Fast überflüssig noch zu bemerken, daß mit der komplexen Größe ($i^2 = -1$)

$$\mathbf{v} = v_\xi + i v_\eta \quad (4.104)$$

die obigen Bewegungsgleichungen in der Form

$$\boxed{\mathbf{v}' + |\mathbf{v}| \mathbf{v} + i = 0} \quad (4.105)$$

geschrieben werden können, die mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{v}(0) = \frac{v_0}{\sqrt{g/k}} e^{i\Theta} \equiv \sqrt{\nu} e^{i\Theta} \quad (4.106)$$

gelöst werden muss.

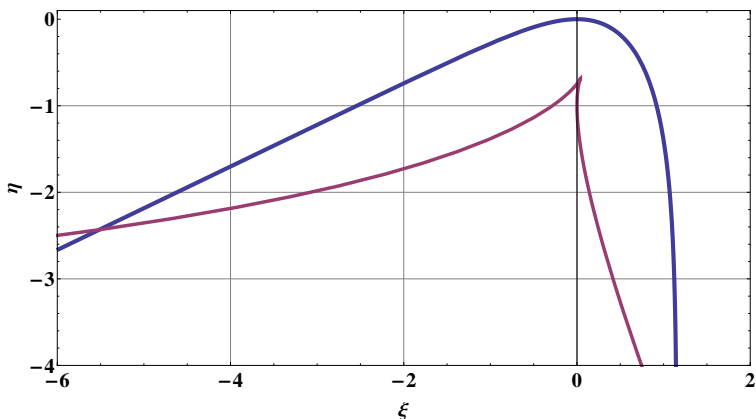


Fig. 4.9: Die Evolute (lila; Ortskurve der Berührungskreis - Mittelpunkte) der ballistischen **Normalkurve** (blau), bei der die Geschwindigkeit am Scheitelpunkt gleich der Grenzggeschwindigkeit $\sqrt{g/k}$ ist. Man sieht hier, dass der Punkt maximaler Krümmung nicht im Gipfelpunkt der Bahn liegt. Die alte Impetushypothese („Trägheits - Hypothese“) des Mittelalters ist keine sehr gute Approximation der Wurfkurve gewesen - aber im Prinzip asymptotisch richtig.

4.7 Historische Zahlenbeispiele

Die Berechnung von Wurfweiten war gegen Ende des 18. Jahrhunderts ein aktuelles Forschungsproblem.⁸ Als Beispiel sei hier die Tabelle (4.10) und die rechnerische Auswertung (4.11) zur Schussweite einer französischen Kanone aus dem Jahre 1771 vorgelegt. Wahrscheinlich handelte es sich dabei um eine Vorläuferversion der *Canon de 12 Gribeauval* der französischen Feldartillerie. JEAN-BAPTISTE VAQUETTE DE GRIBEAUVAL (1715 - 1789) war Begründer eines einheitlichen Systems von Geschützen, welches auf älteren Konzepten von JUSTIN AMEDEC ETHAN DE MUSTEVE von 1765 aufbauten. GRIBEAUVAL ist auch bekannt für die Konstruktion der Gribeauval - Lafette, die in den napoleonischen Kriegen eine große Rolle spielte.

Die beste Anpassung an die alten historischen Datenpunkte liefert

⁸Angeblich konnte der französische Mathematiker P.S. Laplace 1789 durch Berechnung von Artilleriegeschossbahnen seinen Kopf in der Revolution retten. Über sein Rechenverfahren ist aber nichts bekannt

Angle de Pro- jection.	Portées moyen- nes.	Result de la I. methode	Erreurs	Result de la II. methode	Erreurs
degrès	toises				
20	414	402,6	+11,4	388	+26,2
30	499	504	-5	486	+13
40	568	547,5	+20,5	542	+26
43	524	547	-23	531	-9
45	515	544	-29	529	-14
50	497	529	-32	523	-26
60	446,5	426,5	+20	437	+9,5
70	331	338	-7	320	+11
75	270	265	+5	248	+22
			-39,6		+58,7

Fig. 4.10: Schussweiten von Kanonenkugeln, wie sie 1771 an der Artillerieschule a la Fère in Frankreich gemessen wurden (1 Toise = 1.949 m). Bei der verwendeten Kanone handelt es sich wahrscheinlich um einen 12 Pfänder. Hennert wertet 1796 mit zwei unterschiedlichen Näherungsformeln diese Daten aus ([67]).

überraschend die numerische Integration der ballistischen Kurve mit den Parametern

$$v_0 \approx 133.5 \text{ m/s}, \quad \sqrt{g/k} \approx 127.3 \text{ m/s} \quad (4.107)$$

Die Qualität des Fits wird durch die Streuung $\sigma = 27.9$ m ausgedrückt. Für die Lambert - Approximation gilt dagegen $v_0 = 120$ m/s und $\sqrt{g/k} \approx 176$ m/s. Die Streuung beträgt hier $\sigma = 34.8$ m. Die exakte numerische Integration bevorzugt gegenüber der analytischen Approximation eine etwas höhere Anfangsgeschwindigkeit, dafür aber eine deutlich niedrigere Endgeschwindigkeit. Alle Geschwindigkeiten liegen aber im *subsonischen* Bereich. Bemerkenswert ist allemal, daß trotz sehr roher Wurfdaten aus dem Jahre 1771 die Signatur einer ballistischen Kure sehr deutlich zu Tage tritt. Die theoretischen „Fits“ der Ergebnisse nach HENNERT aus dem Jahre 1799 sind da schon etwas schlechter (grüne und orange Punkte). Für den ersten Fit gilt die Streu-Qualität $\sigma = 38.1$ m, für den zweiten $\sigma = 36.4$ m, also etwas besser. Die Hauptursache der Residuen dürfte einerseits bei der Anfangsgeschwindigkeit v_0 liegen, die abhängig von Pulvermenge, chemischen Pulverqualität, Geschossmasse und Rohrlänge ist, andererseits in einer Abdrift der Kanonenkugeln durch induzierte Rotation (*Magnuseffekt*) oder Windscherung.

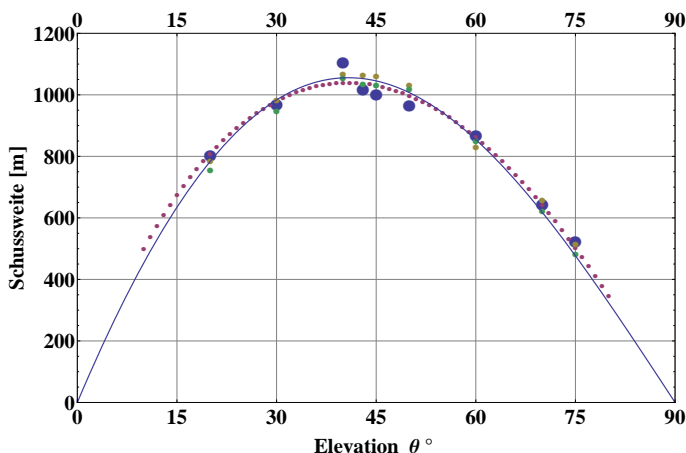


Fig. 4.11: Auswertung der Schussweiten einer wahrscheinlich 12-pfündigen französischen Artilleriekanone des Gribeauval-Systems von 1771, wie sie in der Tabelle (4.10) dargestellt sind. Die blauen Punkte sind die originalen Messdaten, rosaroten Punkte stellen den „best-fit“ der Wurfweiten dar, abgeleitet aus einer numerischen Integration der ballistischen Kurve, die blaue durchgezogene Linie ist die beste Lambert-Approximation und die grünen und orangen Punkte repräsentieren die theoretischen Ergebnisse von HENNERT aus dem Jahre 1799.

Doch wie schon weiter oben durch das Zitat von G. VON SCHARNHORST belegt, benutzte man in den meisten Fällen einfach die parabolische Theorie, also für die Schussweite W und die Visierhöhung Θ im ebenen Gelände die Formeln (siehe 3.3)

$$W = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\Theta); \quad \sin(2\Theta) = \frac{gW}{v_0^2}. \quad (4.108)$$

Doch diese Formeln sind natürlich für Kanonenkugeln bei höheren Abschussgeschwindigkeiten unzureichend. Etwa 40 Jahre nach der Arbeit von HENNERT erhielt zu Beginn des Jahres 1842 der Direktor der Berliner Sternwarte, J. ENCKE (1791 - 1865), ein ehemaliger Artillerieleutnant der Befreiungskriege, vom Preußischen Generalstab ein Schreiben, in dem er als Gutachter für eine Versuchsreihe zur Schussweite von Geschützen Stellung beziehen sollte. In einem Brief vom 24. Mai 1842 an den Mathematiker C.F. GAUSS schreibt er unter anderem ([23]):

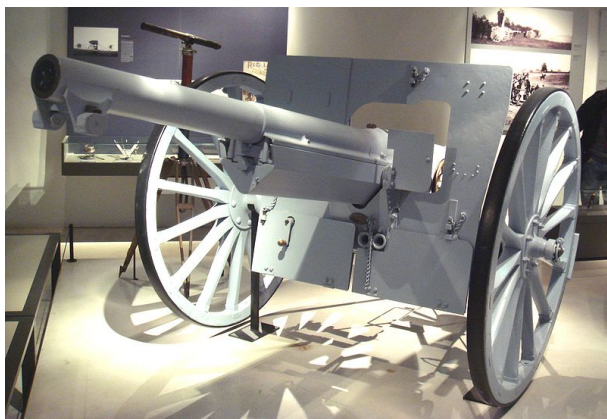


Fig. 4.12: Die Canon de 75 modèle 1897 war ein leichtes französisches Feldgeschütz gegen Ende des 19. Jahrhunderts, welches durch die Kombination verschiedener neuer Funktionen die Artillerie revolutionierte. Verwendung einteiliger Patronenmunition, Nordenfolt - Schnellfeuerverschluss, Wiederspännabzug und eine Lafette mit Sporn. Der Brems - und Vorholmechanismus der 75er war ein hydropneumatisches System. Mündungsgeschwindigkeit: $v_0 = 530 \text{ [m/s]}$ (Schrappnell) und $v_0 = 580 \text{ [m/s]}$ (Sprenggranate). Reichweite: **6800 – 11200[m]**. (Quelle: wikimedia commons, PHGCOM, Musee de l'Armee, Paris)

...Vor einigen Monaten erhielt ich von dem Chef der Artillerie eine Aufforderung, mich über die Art zu äußern, wie die Versuchsergebnisse der Artillerie zu behandeln seien, um sowohl einesteils Schusstafeln zu erhalten, welche auch die möglichen Abweichungen geben, anderenteils bei künftigen Versuchen eine Leitung zu haben und die Theorie zu vervollkommen. Es war dabei ausdrücklich bemerkt, dass man wünsche, ich solle von der bisherigen ballistischen Theorie wo möglich keinen Gebrauch machen, da sie sich ungenügend erwiesen. Als ein Beispiel waren folgende Zahlen gegeben, welche, wie ich später erfuhr, zu einem 50 Pf. Mörser, wo die Bombe etwa $8\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser hatte und das Geschoss etwa 6 Kaliber lang war, gehörte.

Ob das Geschoss jetzt eine Kugel war oder schon mehr ein *Langgeschoss*, geht aus den Angaben nicht klar hervor. ENCKE notiert jetzt eine Tabelle

\mathcal{L}	[l]	1°	5°	10°	15°	20°
2	x_W	91.2	290.9	510.2	707.6	864.0
2	σ_W	4.5	14.7	14.5	21.1	23.5
5	x_W	201.7	754.2	1303.1	1729.9	2212.0
5	σ_W	14.8	22.7	34.3	26.5	41.4
8	x_W	358.0	1026.8	1716.8	2319.7	2832.4
8	σ_W	22.1	19.7	30.9	45.9	38.1

Tab. 4.2: Die Schusstafel des Preußischen Generalstabes von 1842, wie sie ENCKE mitgeteilt wurde. Die erste Spalte enthält die Menge der Pulverladung (die letzten beiden Werte von 8 Pfund waren nicht notiert und wurden hier aus der energetischen Proportion $v_0 \propto \sqrt{m_{\text{Pulver}}}$ abgeschätzt), die zweite markiert die Schussweiten und die Standardabweichung in der Längeneinheit [l] (1 Schritt = 0.75 [m]), die dritte bis siebente Spalte die entsprechenden Werte für die fünf verschiedenen Elevationswinkel. Bei den Streuwerten ist zu bedenken, dass erst ab 1860 drallstabilisierte Geschosse (spiralförmig gezogene Kanonenrohre) verwendet wurden.

für die mittlere Schussweite und deren Streuung für 3 verschiedene Pulverladungen und 5 verschieden Elevationswinkeln. Die Entfernungen waren noch in *Schritten* angegeben. Ich nehme hier an, daß 1 *Schritt* = 0.75 m ist. Für jeden Winkel wurden 15 Versuche gemacht, so dass insgesamt 5 mal 15 mal 3 gleich 225 Weitenmessungen durchgeführt wurden. Bei den Versuchen wurde offenbar genau auf die Lage des Schwerpunktes der Kanonenkugeln geachtet – die wohl genau mittig sein musste. J. ENCKE schreibt: *Man bestimmt jetzt die Lage des Schwerpunktes, indem man die Kugeln auf Quecksilber schwimmen lässt.* Und etwas später: *Mir sind Versuche mitgeteilt, wo unter ähnlichen Verhältnissen die Schussweite bei Schwerpunkt unten 838.0 Schritt betrug, bei Schwerpunkt oben aber 1362.1 Schritt.* Dieser Effekt ist natürlich auf den *Magnuseffekt* bei schnell rotierenden Kugeln zurückzuführen, den schon B. ROBINS kannte, aber ENCKE nicht erwähnt. Der ehemalige Artillerieleutnant der Befreiungskriege und Direktor der Berliner Sternwarte, J. ENCKE, machte in seinem Brief an C.F. GAUSS von 1842 dann über die Schusstabelle die interessante Bemerkung:

Der Versuch, die bisher bekannten ballistischen Formeln mit diesen Zahlen in Übereinstimmung zu bringen, ist mir nicht geglückt. Wenn man die Konstante des Widerstandes und die Anfangsgeschwindigkeit aus irgend zwei Werten bestimmt, so

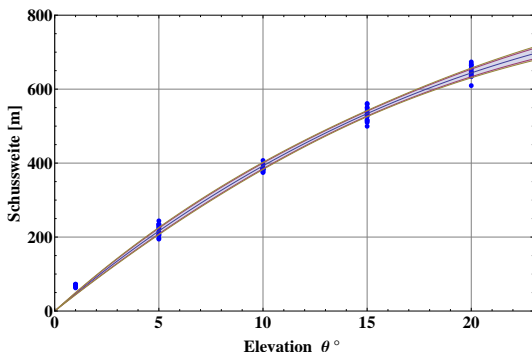


Fig. 4.13: Die Auswertung der simulierten Schusstabelle für 2 Pfund Pulverladung. Der Fit mit der Formel (4.90) liefert die Werte $v_0 = 115 \pm 2 \text{ [m/s]}$ und $v_\infty = 125 \pm 5 \text{ [m/s]}$.

weichen die übrigen viel zu stark ab.

Hier drängt sich die Frage auf: Welche ballistische Formel hat ENCKE herangezogen und warum benutzt er nicht die Methode der kleinsten Quadrate auf ALLE Werte der Tabelle, genau wie er es als Himmelsmechaniker bei den Örtern von Kometen an der Himmelskugel immer anwendet? Der Brief gibt hierüber keine Auskunft. In den Figuren (4.13, 4.14, 4.15) habe ich diese Rechnung nachgeholt und man sieht eine relativ gute Übereinstimmung mit der ballistischen Formel (4.90) – außer bei dem unrealistischen Elevationswinkel von 1 Grad. Die Lambert-Approximation scheint für Elevationen kleiner 20 Grad völlig ausreichend zu sein, was auch durch eine numerische Integration für alle drei Fälle gezeigt werden kann. Merkwürdig ist nur, daß die Grenzggeschwindigkeit bei (4.13) etwas niedriger als bei den anderen fast übereinstimmenden Versuchswerten liegt. Wie das zu erklären ist, bleibt unklar. Zumindest scheint die Pulvermenge und die Anfangsgeschwindigkeit durch die energetische Beziehung

$$v_0^2 \sim m_{\text{Pulver}} \quad (4.109)$$

verknüpft zu sein, wie man es bei identischen Kugelmassen erwartet. Alle Geschwindigkeiten lagen bei diesen Versuchen unter der Schallgeschwindigkeit - waren also **subsonisch**.

Erst die Erfindung des **Ballistit** im Jahre 1887 durch ALFRED NOBEL

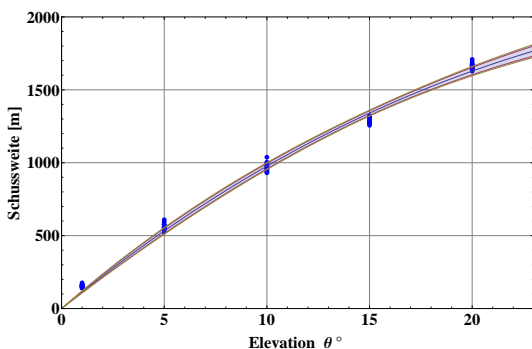


Fig. 4.14: Die Auswertung der simulierten Schusstabelle für 5 Pfund Pulverladung. Der Fit mit der Formel (4.90) liefert die Werte $v_0 = 180 \pm 2$ [m/s] und $v_\infty = 211 \pm 10$ [m/s]. Bei 15 Grad Elevation sieht man den von C.F. GAUSS bezweifelte Wert. Ob hier ungewöhnliche Windgeschwindigkeiten oder eine starke Rotation der Mörserkugel (Magnuseffekt) eine Rolle gespielt hat, bleibt unklar.

ermöglichte es, *supersonische* Abschussgeschwindigkeiten bei Geschützen zu erreichen (siehe Fig. 4.12). **Ballistit** ist eine Weiterentwicklung der *Sprenggelatine* und ist ein energiereiches rauchschwaches Pulver, welches das Schwarzpulver (starke Rauchentwicklung) ersetzen konnte. Die Abbreitgeschwindigkeit des *Ballistit* ist extrem schnell, aber doch langsam genug, um im Geschützlauf keinen zu hohen Druck entstehen zu lassen.

Interessant ist noch die Antwort von C.F. GAUSS vom 15. August 1842 auf die damaligen Probleme ([23]): *Für Ihre Mitteilung der Artillerie Versuche bin ich ihnen sehr dankbar. BESSELS Aburteilung ist unstrittig zu schroff. Es gibt ohne Zweifel viele Fälle, wo man Beobachtungszahlen, auch ohne sie mit einer Theorie bemeistert zu haben, mit Nutzen einer Interpolation unterwerfen kann, in so fern man von der wirklichen Zuverlässigkeit aller jener Beobachtungszahlen eine völlige Überzeugung hat. Von der anderen Seite ist kaum zu leugnen, dass gerade dieser Überzeugung zumahl bei etwas verwickelten Gegenständen die volle Lebendigkeit fehlen kann, wenn man nicht ihren Zusammenhang unter sich mit einer Einsicht in ihre Theorie durchdringt...*

GAUSS drückt dann einigen Zweifel bezüglich bestimmter Daten aus und bemerkt, dass man eigentlich sämtliche Versuchsbedingungen kennen müsste. Er schlägt zudem vor, die Bahn der Kanonenkugel durch mehrere

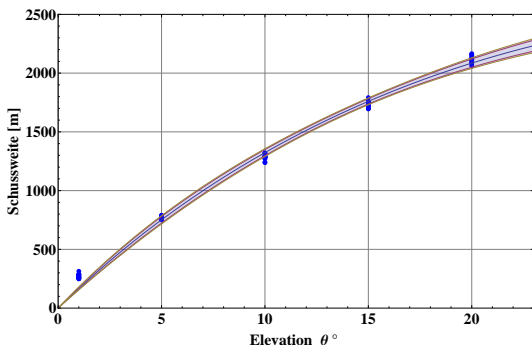


Fig. 4.15: Die Auswertung der simulierten Schusstabelle für wahrscheinlich 8 Pfund Pulverladung. Der Fit mit der Formel (4.90) liefert die Werte $v_0 = 220 \pm 3$ [m/s] und $v_\infty = 194 \pm 7$ [m/s]. Eine Methode der numerischen Integration liefert praktisch die gleichen Werte.

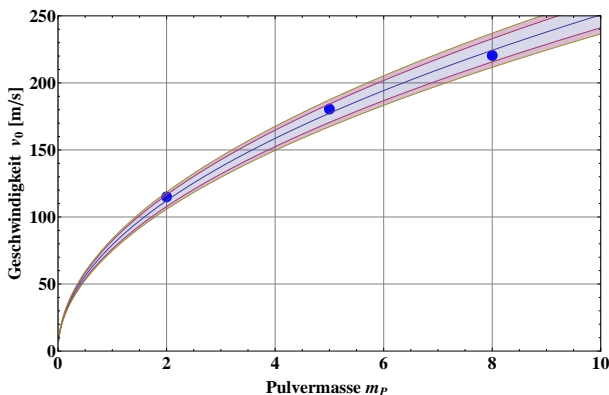


Fig. 4.16: Die Abhängigkeit der Abschussgeschwindigkeit der Kanonenkugel von der verwendeten Pulvermasse. Die energetische Beziehung (4.109) scheint recht gut erfüllt zu sein.

schicklich aufgestellte *Theodoliten* trigonometrisch zu vermessen. Diese von GAUSS geforderte Vermessung wird heutzutage durch eine teure MSP - Multi Sensor Plattform erledigt.⁹

In dem historischen Heimatbuch *Meppen in alten Ansichten* von H.

⁹Bei der Firma **Rheinmetall Defence** heißt es hierzu: Die Multi Sensor Plattform

HEEREN und D. STOCKMANN wird unter anderem über den Besuch von Kaiser Wilhelm II in Meppen erinnert, der den Krupp'schen Schießplatz 1892 besuchte¹⁰. Es heißt dort:

Am 28. April 1892 traf der Kaiser mit großem Gefolge in Meppen ein, wo das Schießen sofort begann: Zunächst wurde aus leichten Kanonen, dann aber aus ganz schweren Schnellfeuerschiffsgeschützen auf Scheiben geschossen und zwar auf eine Entfernung bis zu 16 Kilometern. Nachmittags begann das Schießen mit schweren Schiffsgeschützen. Der Kaiser äußerte zu Krupp¹¹ seine große Befriedigung. Bei seiner Abfahrt wurde ein Salut von 35 Schüssen abgegeben.

C. CRANZ bezieht sich in seinem Lehrbuch von 1910, Seite 102, auf dieses Ereignis und gibt mit vorgegebenen Anfangswerten eines speziellen Geschützes die Eckdaten der ballistischen Kurve an. Wir wollen hier diese Rechnung wiederholen und dann Vergleiche anstellen. Anfangsgeschwindigkeit und Elevation sind

$$v_0 = 640 \text{ m/s}; \quad \Theta = 44^\circ. \quad (4.110)$$

Die Art des verwendeten Luftwiderstandsgesetzes erfährt man nicht, nur das die Grenzggeschwindigkeit bei

$$v_\infty = \sqrt{\frac{g}{k}} \approx 580 \text{ m/s} \quad (4.111)$$

liegen soll. C. CRANZ errechnet ohne Angabe eines Verfahrens die Eck-

MSP ist eine mobile, hoch präzise 3D Tracking-Messeinrichtung für das Registrieren und Analysieren von ballistischen Flugbahnen und nicht ballistischen Flügen mit den Genauigkeiten, die für einen Theodoliten im Feldeinsatz typisch sind. Die Messresultate in Realzeit erreichen eine Winkelauflösung in Azimut und Elevation von 0,6 Bogensekunden...

¹⁰Seit 1987 Wehrtechnische Dienststelle 91 (WTD91)

¹¹FRIEDRICH ALFRED KRUPP (1854-1902)



Fig. 4.17: Der Besuch von Kaiser Wilhelm II am 28. April 1892 auf dem Schießplatz bei Meppen. Zu sehen sind zwei Mantelringkanonen für die Marine des ausgehenden 19. Jahrhunderts. (Quelle: BAAINBw, Aus der Geschichte der WTD 91)

daten

Horizontale Schussweite	19066 m
Flugzeit (T)	68.8 s
Aufprallgeschwindigkeit	380.4 m/s
Spitzer Aufprallwinkel	58° 21'
Scheitelabzisse	10840 m
Scheitelordinate (H)	6150 m
Vertikale Asymptote	29300 m

Mit der Näherung $T = \sqrt{8H/g}$ ergibt sich mit $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ und der angegebenen Scheitelhöhe H die Flugzeit zu $T = 70.8 \text{ s}$ - also in ausreichender Übereinstimmung. Doch die Ergebnisse lassen sich mit einem rein quadratischen Widerstandsgesetz *nicht exakt reproduzieren*; zumindest dann nicht, wenn man als Grenzggeschwindigkeit **580 m/s** und *keine Abnahme der Luftdichte mit der Höhe* annimmt. Lässt man den Exponenten n des Widerstandsgesetzes v^n und die Grenzggeschwindigkeit

v_∞ als freie Parameter, so lassen sich die horizontale Schussweite und die Scheitelabzisse recht gut durch die Größen

$$n \sim \mathbf{2.2} \text{ und } v_\infty \sim \mathbf{469 m/s} \quad (4.112)$$

darstellen. Hieraus kann man vorsichtig schließen, daß C. CRANZ die obigen Bahndaten mit dem quadratischen Widerstandsgesetz $n = 2$ berechnet hat. Der beste Fit ergibt sich dann für

$$v_\infty \sim \mathbf{474 m/s}. \quad (4.113)$$

Durch numerische Integration als auch durch die Integraldarstellung ergeben sich dann übereinstimmend die folgenden Bahndaten:

Horizontale Schussweite	19062 m
Flugzeit (T)	70.8 s
Aufprallgeschwindigkeit	338.9 m/s
Spitzer Aufprallwinkel	61° 3'
Scheitelabzisse	10924 m
Scheitelordinate (H)	6226 m
Vertikale Asymptote	27961 m

Wie man sieht, stimmen die exakten Werte mit denen von CRANZ aus dem Jahre 1910 mehr oder weniger gut überein. Mit der Näherung $T = \sqrt{8H/g}$ ergibt sich mit der bekannten Scheitelhöhe hier die Flugzeit zu $T = \mathbf{71.3s}$, also in guter Übereinstimmung mit der numerischen Integration. Um 1900 war eben die Berechnung einer ballistischen Flugbahn mit numerischen Hilfstafeln keine sehr leichte Aufgabe.

4.8 Die échelle ballistique des J.H. Lambert

Die ballistische Kurve ist im einfachsten Fall durch drei Randbedingungen gekennzeichnet: *Anfangsgeschwindigkeit* v_0 , *Elevation* Θ beim Abschuss und schließlich den *ballistischen Parameter* k . Wie lassen sich diese drei Parameter möglichst kompakt in ihrem Einfluss auf eine ballistische Kurve graphisch darstellen? Im Dezember 1767 begann J.H.LAMBERT, dieses Problem mit Hilfe der umfangreichen numerischen Tabellen des H.F.

VON GRÄVENITZ (1744-1764) durch seinen graphischen *échelle ballistique* zu lösen. Im April 1773 begann er, seine Ergebnisse niederzuschreiben und sie im selben Jahr und in einer Ergänzung 1775 zu veröffentlichen ([30]).

Betrachten wir zunächst die verschiedenen *fundamentalen Längeneinheiten* des ballistischen Problems. Diese sind

$$\frac{v_0^2}{g}; \quad \frac{v_H^2}{g}; \quad \frac{1}{k}; \quad \frac{v_0}{\sqrt{k}g}. \quad (4.114)$$

Die Größe v_H bezeichnet hier die Geschwindigkeit am Scheitelpunkt der Bahn und $k = k_D$ den Luftwiderstandsbeiwert der Dimension einer inversen Länge. In einem *Memoire* und einem Buch zwischen den Jahren 1765 - 1767 ging J.H. LAMBERT das „ballistische Problem“ neu an und erlangte für die ballistische Kurve im engeren Sinne eine sehr gute analytische Approximation, die besser als die Reihenapproximation von L. EULER war. Wir benutzen zunächst die dritte Skalierung und definieren wie J.H. LAMBERT 1766 eine Länge L gemäß

$$L = \frac{1}{k} \quad (4.115)$$

und haben so die dimensionslosen Skalierungen

$$x = \frac{1}{2k} \xi; \quad y = \frac{1}{2k} \eta. \quad (4.116)$$

Damit lautet die Differentialgleichung (4.46) dritter Ordnung ohne den Faktor 2

$$\boxed{\eta''' = \sqrt{1 + \eta'^2} \eta''}. \quad (4.117)$$

Die Anfangsbedingungen sind jetzt

$$\eta[0] = 0; \quad \eta'[0] = \tan[\Theta]; \quad \eta''[0] = -\frac{1}{2} \mu \sec[\Theta]^2, \quad (4.118)$$

wobei μ durch

$$\mu = \frac{g}{k v_0^2} = \left(\frac{v_\infty}{v_0} \right)^2 \equiv \left(\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}}{v_0} \right)^2 \quad (4.119)$$

gegeben ist. Der Parameter stellt somit das Verhältnisquadrat von Grenzfalgeschwindigkeit zur Abgangsgeschwindigkeit dar. In der Artillerie des 18ten Jahrhunderts dürfte dieser Parameter in der Größenordnung von $\mu \geq 1$ gelegen haben, wenn wir für eine fallende Kanonenkugel als Grenzfalgeschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit annehmen wollen. Aus diesem System kann man die beiden wichtigsten *semikonvergenten* Reihenentwicklungen der ballistischen Kurve *im engeren Sinne* nach *L. Euler* (1745) und *J.H. Lambert* (1766) ableiten. Zur Lösung machen wir

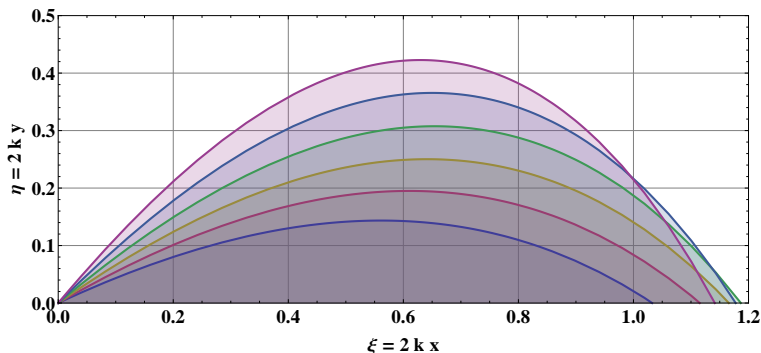


Fig. 4.18: Sechs verschiedene ballistische Kurven aus einer numerischen Integration der Differentialgleichung (4.117) für $\mu = 1$ und den Elevationswinkeln von $25^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ$ und 50° . Deutlich ist die Abweichung von der „Wurfparabel“ zu erkennen. Maximale Schussweite liegt hier bei etwa 40° .

mit dem Entwicklungsparameter μ (4.119) einen Störungsansatz einer gradlinigen Bahn¹²

$$\eta[\xi] = \tan[\Theta] \xi + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j \eta_j(\xi) \quad (4.120)$$

einschließlich der Anfangsbedingungen für $j = 1$

$$\eta_1[0] = 0; \eta'_1[0] = 0; \eta''_1[0] = -\frac{1}{2} \sec[\Theta]^2 \quad (4.121)$$

und für alle anderen $j \geq 2$

$$\eta_j[0] = 0; \eta'_j[0] = 0; \eta''_j[0] = 0. \quad (4.122)$$

¹²Diesen Ansatz hat J.H.Lambert so nicht gemacht

Diese Entwicklung entspricht so einer Funktions - Iteration, wobei in „*nullter Näherung*“ die gradlinige Bahn mit unendlich hoher Geschwindigkeit ($\mu = 0$) durchflogen wird.

Einsetzen des obigen Ansatzes in die Differentialgleichung (4.117) führt zu der Rekursion

$$\begin{aligned}\eta_1'''[\xi] - \sec[\Theta] \eta_1''[\xi] &= 0, \\ \eta_2'''[\xi] - \sec[\Theta] \eta_2''[\xi] &= 2 \sin[\Theta] \eta_1'[\xi] \eta_1''[\xi], \\ \dots &= \dots\end{aligned}\tag{4.123}$$

Die höheren Rekursionen werden sehr schnell algebraisch unzumutbar kompliziert. Wir beschränken uns hier also auf die **erste Näherung**, zumal auch die obige asymptotische Entwicklung *semikonvergent* ist. Für die Funktion $\eta_1[\xi]$ erhält man mit den entsprechenden Anfangsbedingungen

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \xi \sec[\Theta] - e^{\xi \sec[\Theta]} \right)\tag{4.124}$$

Damit ergibt sich in erster **asymptotischer** Ordnung für die analytische Darstellung der ballistischen Kurve in dimensionslosen Koordinaten wieder der Ausdruck

$$\eta = \tan[\Theta] \xi + \frac{1}{2} \mu \left(1 + \xi \sec[\Theta] - e^{\xi \sec[\Theta]} \right).\tag{4.125}$$

Dies ist aber die schon früher abgeleitete wohlbekannte Lambertsche Approximation in einer leicht modifizierten Skalierung. J.H. LAMBERT bemerkte, dass die ballistische Kurve deutlich einfacher und genauer vom Gipfelpunkt (*Scheitelpunkt*) der Bahn aus berechnet und dargestellt werden kann. Denn bei der Kurvenapproximation (4.125) zeigte sich, dass im absteigenden Ast die Kurve gegenüber dem wahren Verlauf etwas zu stark abbiegt und so systematisch eine etwas zu kurze Wurfweite anzeigt. Auch die nächst höhere Iteration ändert daran nicht viel. LAMBERT legte den Koordinatenursprung nicht an den Abschussort mit einem bestimmten Elevationswinkel Θ , sondern in den Gipfelpunkt. Hier ist sicherlich eine bessere Konvergenz zu erwarten. Aufgrund des Hodographen (4.25) ist es zudem möglich, jede ballistische Kurve durch einen einzigen Parameter μ_H bzw. ν_H gemäß

$$\mu_H = \frac{g}{k v_H^2}, \quad \nu_H = \frac{k v_H^2}{g}\tag{4.126}$$

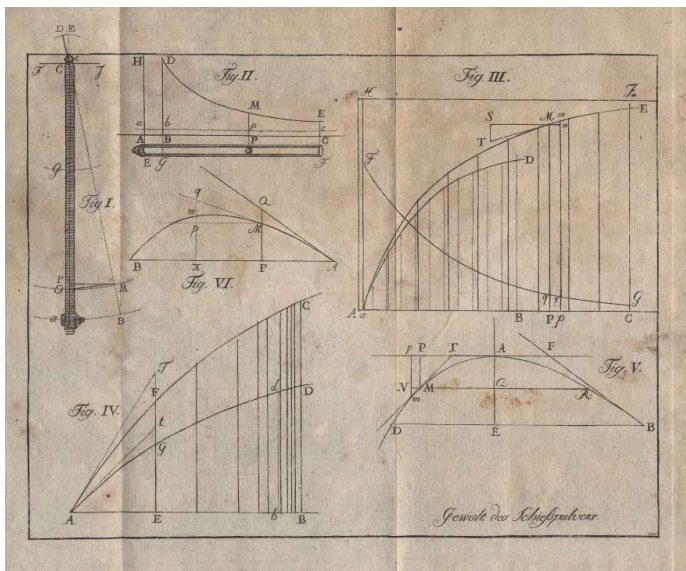


Fig. 4.19: Die fünf Figuren im Anhang des Buches über Ballistik von J.H. LAMBERT AUS DEM JAHRE 1766.

zu klassifizieren, wobei wieder g die Erdbeschleunigung, k der als konstant angenommen Luftwiderstandsbeiwert und v_H die horizontale Scheitelgeschwindigkeit bezeichnet. Der Elevationswinkel Θ und die Abschussgeschwindigkeit v_0 oder μ (4.119) am Abschussort sind hier keine primären Parameter mehr.

Es gilt mit (4.25) einfach

$$\frac{g}{k v_0^2 \cos[\Theta]^2} + \frac{\sin[\Theta]}{\cos[\Theta]^2} + \operatorname{arcsinh}[\tan[\Theta]] = \frac{g}{k v_H^2}. \quad (4.127)$$

oder

$$\mu_H = (\mu + \sin[\Theta]) \sec[\Theta]^2 + \ln \left[\tan \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2} \right] \right]. \quad (4.128)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung gelang es J.H. LAMBERT, eine Vielzahl unterschiedlicher Parameterkombinationen von μ und Θ am Abschussort auf einen **einzigen Parameter** μ_H zurückzuführen.

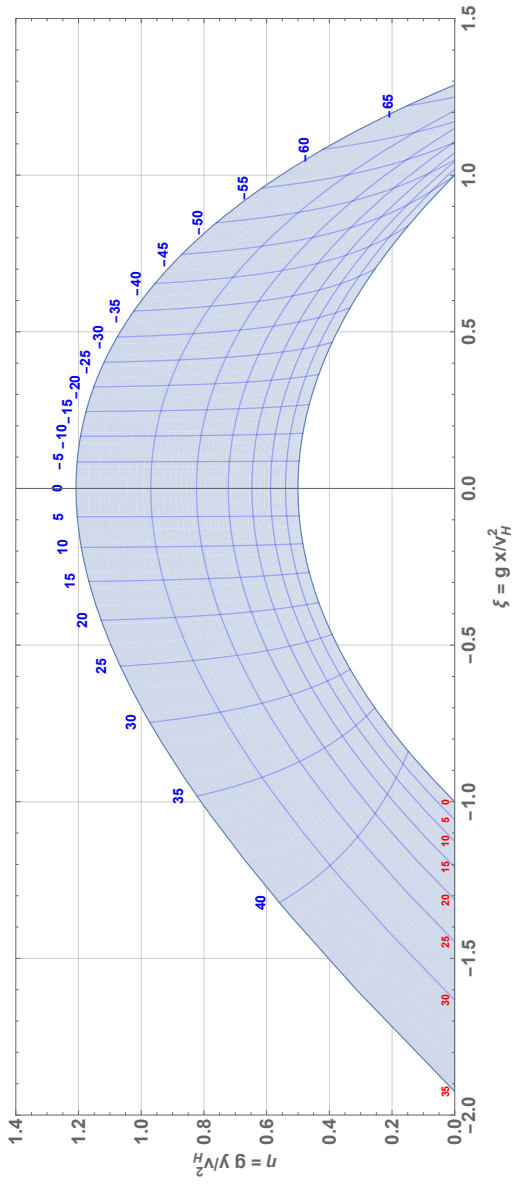


Fig. 4.20: Der neu reproduzierte ballistische Maßstab von J.H.LAMBERT aus dem Jahre 1774. Dargestellt sind 8 ballistische Kurven mit $0 \leq v_H \leq 0.35$ (rote Zahlen $100v_H$) und mit identischer Gipfelpunktgeschwindigkeit v_H . Die Querlinien bezeichnen Punkte gleicher Bahnwinkel θ in Schritthweiten von 5 Grad. Alle Kurven starten links mit der gleichen Elevation $\Theta = \pi/4$. Mit Hilfe des Hodographen und einem horizontalen Lineal lassen sich Bahnkurven und Schussweiten bei Abschusswinkeln kleiner 45 Grad für unterschiedliche Abschussgeschwindigkeiten v_0 mehr oder weniger genau ablesen.

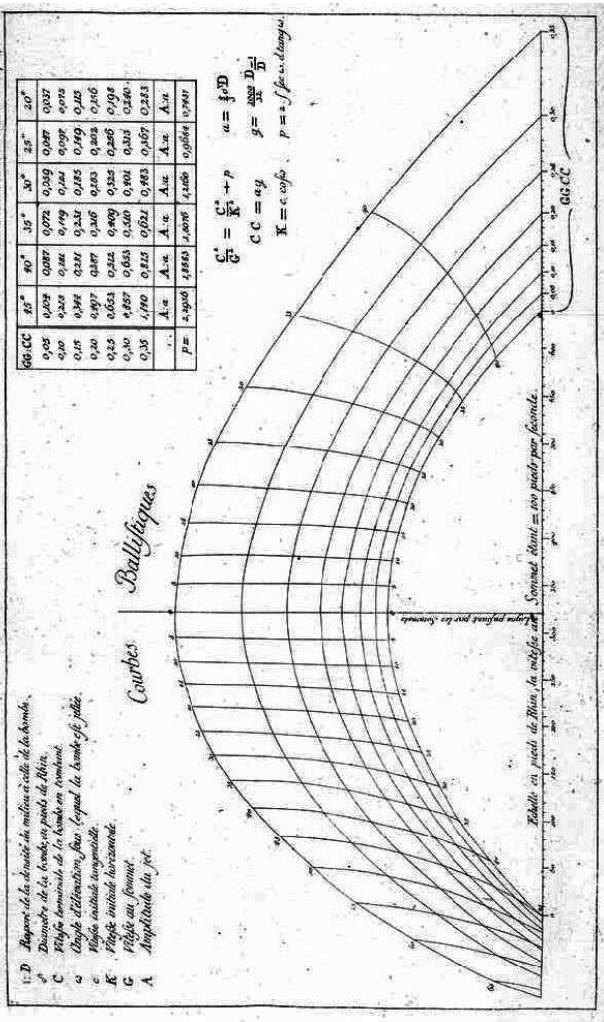


Fig. 4.21: Die originale „Echelle Ballistique“ von J.H. LAMBERT aus dem Jahre 1774, die er mit den Tabellen von GRAEVENITZ aus dem Jahre 1764 erstellt hat ([24]). Sie war eine Art Rechenschieber (Nomogramm) zur schnellen Berechnung von Geschossbahnen. In einer Hilfstabelle werden Werte des exakten analytischen Hodographen für numerische Umrechnungen angegeben. Die Flugrichtung ist hier von rechts nach links dargestellt.

Mit (4.125) erhalten wir im Falle $\Theta = 0$ die Lambertsche Scheitelpunkt - Approximation

$$\eta = \frac{1}{2} \mu_H (1 + \xi - e^\xi), \quad (4.129)$$

wobei hier durch die Wahl des Koordinatensystems die vertikale Koordinate $\eta[\xi]$ rein negativ ist. Durch den Parameter μ_H wird die nach unter gerichtete ballistische Kurve gestaucht oder gestreckt, je nachdem wie der Elevationswinkel und die Abschussgeschwindigkeit sich verhalten.

Die obige Skalierung hat den Nachteil, dass die klassische Wurfparabel mit $k \rightarrow 0$ eine Singularität darstellt. Wir wählen jetzt die neue Skalierung

$$L = \frac{v_H^2}{2g} \quad (4.130)$$

und haben so die dimensionslosen Skalierungen

$$x = \frac{v_H^2}{g} \xi; \quad y = \frac{v_H^2}{g} \eta. \quad (4.131)$$

Da wir eine möglichst genaue Kurvenlandkarte zeichnen wollen, greifen wir jetzt auf die exakten Integrale (4.30) und (4.31) der klassischen ballistischen Kurve zurück und erhalten in der Scheitelpunktform

$$\xi = \int_{\Theta}^0 \frac{\sec[\theta]^2 d\theta}{1 - \nu_H (\ln[\sec[\theta] + \tan[\theta]] + \sec[\theta] \tan[\theta])} \quad (4.132)$$

und

$$\eta = \int_{\Theta}^{\pi/4} \frac{\sec[\theta]^2 \tan[\theta] d\theta}{1 - \nu_H (\ln[\sec[\theta] + \tan[\theta]] + \sec[\theta] \tan[\theta])}. \quad (4.133)$$

Figur (4.20) stellt ein Replikat der ballistischen Bahnkurven von LAMBERT aus dem Jahre 1773 dar. Es wurden acht Kurven mit den Parametern $0 \leq \nu_H \leq 0.35$ in Schrittweiten von 0.05 berechnet, die jede mit einer Elevation von 45° starten. Alle haben die gleiche Scheitelpunktgeschwindigkeit v_H . Die blauen Querlinien bezeichnen Punkte gleicher Flugbahnwinkel θ in Schrittweiten von 5° Grad. Mit Hilfe des Hographen und einem horizontalen Lineal lassen sich Bahnkurven und Schussweiten bei Abgangswinkeln kleiner 45 Grad für unterschiedliche

Abschussgeschwindigkeiten v_0 mehr oder weniger genau ablesen. Ein Vergleich dieses Replikats mit der alten schönen Figur (4.21) von LAMBERT mit den Umrechnungstabellen zeigt sehr gute Übereinstimmung.

Der Integrand in den Ausdrücken (4.132) und (4.133) wird bei einem Abgangswinkel von 45° singulär, wenn

$$1 - \nu_H \left(\sqrt{2} + \ln[1 + \sqrt{2}] \right) = 0 \quad (4.134)$$

erfüllt ist. Daraus folgt die Bedingung

$$\nu_H < \frac{1}{\sqrt{2} + \ln[1 + \sqrt{2}]} \sim \mathbf{0.4356...} \quad (4.135)$$

LAMBERT hat in seiner *échelle ballistique* für $\Theta = \pi/4$ den Wertebereich von ν_H auf $0 \leq \nu_H \leq 0.35$ beschränkt. Schon der noch zulässige Wert $\nu = 0.40$ war wohl für die damalige Artillerie ohne Bedeutung.

4.9 Störungstheorie der Wurfparabel

Anstatt einer Geraden benutzen wir nun die Wurfparabel als erste Näherung der ballistischen Kurve. Hier sollte das Problem der Divergenz der Wurzelfunktion im absteigenden Ast der ballistischen Kurve nicht mehr auftreten. Wie werden die Wurfweite, die Scheitelhöhe und die Flugzeit durch das Auftreten eines sehr kleinen Parameter $k \equiv k_D$ korrigiert? Wie wird der Elevationswinkel durch dieses kleine k bei der maximalen Wurfweite verändert?

Um diese Frage im Grenzfall $k \rightarrow 0$ zu beantworten, betrachten wir zunächst die asymptotischen Ausdrücke der Formel (4.90) im Grenzfall $\nu \equiv k v_0^2/g \rightarrow 0$ (verschwindend kleiner Luftreibung). Im Falle $\nu \rightarrow 0$ ergeben sich mit (4.88) die Entwicklungen

$$\frac{1}{2} \frac{\cos[\Theta]}{\beta} = \frac{1}{2} \cos[\Theta] - \nu \sin[\Theta] \cos[\Theta] + O(\nu^2) \quad (4.136)$$

und

$$-\frac{e^{-1/\beta}}{\beta} = -\frac{1}{e} + 2\nu^2 \frac{\sin[\Theta]^2}{e} - O(\nu^3) \quad (4.137)$$

Für die Lambertsche Funktion im unteren Ast gilt nach Definition für $z \rightarrow 0$ die asymptotische Entwicklung

$$\mathbf{W}_{-1} \left(-\frac{1}{e} (1 - z) \right) = -1 - \sqrt{2z} + \dots \quad (4.138)$$

Mit alledem ergibt sich so im Limes $\nu \rightarrow 0$ für die Wurfweite die Formel

$$\xi_w = \nu \sin[2\Theta] - O(\nu^2). \quad (4.139)$$

Dies entspricht aber der parabolischen Theorie der ballistischen Kurve nach *Galilei - Torricelli*. Bei maximaler Wurfweite muss der Elevationswinkel

$$\Theta_{max} = \frac{\pi}{4} \quad \{\nu \rightarrow 0\} \quad (4.140)$$

betragen.

Im allgemeinen Fall des Parameters $\nu = k v_0^2/g$ muss die asymptotische Formel (4.90) für die Wurfweite nach Θ differenziert und Null gesetzt werden. Die nichttriviale Wurzel für den extremalen Winkel Θ_m ergibt sich nach einiger Umrechnung mit (4.87) zu

$$\boxed{1 + \frac{2\nu}{\sin[\Theta_m]} = \exp \left(\frac{2\nu}{(1 + 2\nu \sin[\Theta_m]) \sin[\Theta_m]} \right)}. \quad (4.141)$$

Die Lösung dieser transzendenten Gleichung liefert den extremalen Abwurfinkel in der EULER - LAMBERTSCHEN Näherung, aber jetzt für den ganzen Wertebereich (siehe Fig. (4.22)). Denn asymptotisch gilt mit der obigen Relation wie in (4.55)

$$\sin[\Theta_m] = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6} \nu + \dots \quad (\nu \rightarrow 0) \quad (4.142)$$

Allerdings sind die so erhaltenen extremalen Elevationswinkel etwas zu niedrig, wenn man sie mit den exakten Werten vergleicht, wie sie sich aus einer numerischen Integration ergeben (siehe rote Kurve in Fig. (4.22)). Damit zeigt das alte Problem von TARTAGLIA aus dem Jahre 1537 unerwartete mathematische Schwierigkeiten, wenn man den Luftwiderstand berücksichtigen will. Wie schon bei der Reihe (4.55) von EULER aus dem Jahre 1745 erwähnt, lautet die korrekte asymptotische Entwicklung im Limes $\nu \rightarrow 0$

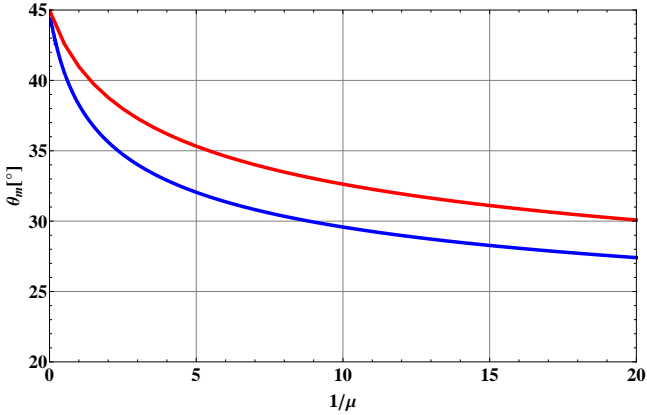


Fig. 4.22: Der optimale Elevationswinkel Θ_m als Funktion von $1/\mu = k v_0^2/g$ für maximale Wurfweite im ebenen Gelände, wie er sich aus der transzendenten Gleichung (4.141) ergibt (blaue Kurve), welche auf der **Lambertschen Approximation** beruht. Zum Vergleich ist auch die exakte Abhängigkeit dargestellt, wie sie sich aus einer numerischen Integration der ballistischen Differentialgleichung ergibt (rote Kurve). Diese exakte Abhängigkeit wird weiter unten durch die asymptotisch exakte Formel (4.165) gut approximiert.

$$\sin[\Theta_m] = \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathbf{c}_1 \nu + \dots \quad (4.143)$$

in der die Zahl \mathbf{c}_1 nicht aus einer Polynomdarstellung, sondern nur mit einer speziellen Störungstheorie berechnet werden kann. Wir werden sehen, daß diese Zahl $\mathbf{c}_1 = (6 - \sqrt{2} \log(1 + \sqrt{2}))/64$ sein muss (siehe 4.159).

Für unsere Untersuchungen ist es günstiger, die Fundamentalgleichung (4.46) anstatt mit (4.116) mit der alternativen dimensionslosen Skalierungen

$$x = \frac{v_0^2}{g} \xi; \quad y = \frac{v_0^2}{g} \eta; \quad (4.144)$$

in die Form

$$\eta'''[\xi] = 2 \nu \sqrt{1 + \eta'[\xi]^2} \eta''[\xi]. \quad (4.145)$$

zu transformieren. Die Anfangsbedingungen sind

$$\eta[0] = 0; \quad \eta'[0] = \tan[\Theta]; \quad \eta''[0] = -\sec[\Theta]^2, \quad (4.146)$$

mit dem dimensionslosen Parameter

$$\nu = \frac{1}{\mu} \equiv \frac{k v_0^2}{g}. \quad (4.147)$$

Um die Gleichung Im Grenzfall $\nu \rightarrow 0$ zu lösen, machen wir den *Ansatz*

$$\eta[\xi] = \eta_0[\xi] + \nu \eta_1[\xi] + \nu^2 \eta_2[\xi] + \dots \quad (4.148)$$

und versuchen, die einzelnen Funktionen sukzessiv zu berechnen. Die Lösung ohne Luftwiderstand ($\nu = 0$) ist nämlich die Wurfparabel

$$\eta_0[\xi] = \tan[\Theta] \xi - \frac{1}{2} \sec[\Theta]^2 \xi^2. \quad (4.149)$$

Um die Funktion $\eta_1[\xi]$ zu bestimmen, wird der Ansatz (4.148) in die obige Differentialgleichung eingesetzt und bis zur ersten Ordnung in ν entwickelt. Für $\eta_1[\xi]$ ergibt sich auf diese Weise die Differentialgleichung

$$\eta_1'''[\xi] + 2 \sec[\Theta]^2 \sqrt{1 + (\tan[\Theta] - \xi \sec[\Theta]^2)^2} = 0, \quad (4.150)$$

welche mit der Anfangsbedingung $\eta_1[0] = \eta_1'[0] = \eta_1''[0] = 0$ gelöst werden muss. Striche bedeuten hier Ableitungen nach der Variablen ξ . Die Gleichung lässt sich exakt integrieren, doch die analytische Lösung füllt über eine Seite. Im Hinblick auf die EULER'sche Lösung ist es aber interessanter, die Korrekturen zur Wurfweite W , zur Gipfelhöhe H und zur Flugdauer T einer Kanonenkugel in erster oder auch zweiter Ordnung in ν zu kennen. Im ebenen Gelände muss zunächst für die Wurfweite

$$\eta_0[\xi_w] + \nu \eta_1[\xi_w] = 0 \quad (4.151)$$

gelten. Mit dem Ansatz

$$\xi_w = \sin[2\Theta] - c_{1w}[\Theta] \nu + \dots \quad (4.152)$$

folgt mit Hilfe von Computeralgebra zunächst der Ausdruck

$$c_{1w}[\Theta] = -\cot[\Theta] \eta_1[\sin[2\Theta]]. \quad (4.153)$$

Ausgerechnet ergibt sich

$$c_{1w}[\Theta] = \frac{1}{16} \left(9 \cos[\Theta] - 5 \cos[3\Theta] + 2 \cos[\Theta]^2 (3 - 5 \cos[2\Theta]) \cot[\Theta] \ln \left[\tan \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2} \right] \right] \right). \quad (4.154)$$

In physikalischen Koordinaten berechnet sich also die Wurfweite im ebenen Gelände zu

$$W = \frac{v_0^2}{g} \left\{ \sin[2\Theta] - c_{1w}[\Theta] \frac{k v_0^2}{g} + O(k^2) \right\} \quad (4.155)$$

Im Gegensatz zur Polynomentwicklung (4.54) von EULER ist (4.155) *exakt* im Sinne der ersten Ordnung ν . Welcher Autor in der Geschichte zur ballistischen Kurve die exakte asymptotische Entwicklung (4.155) zum erstenmal mit der Winkelfunktion (4.154) aufgestellt hat, ist mir nicht bekannt. Im Lehrbuch von C. CRANZ ist sie zumindest nicht zu finden.

Nun bereitet es auch keine großen Schwierigkeiten, die *maximale* Wurfweite x_{wm} und den dafür *optimalen* Winkel Θ_m in erster Ordnung ν abzuschätzen. Mit (4.155) folgt die maximale Wurfweite W mit dem Ansatz

$$\Theta_m = \frac{\pi}{4} - c_{1\Theta} \cdot \nu + O(\nu^2) \quad (4.156)$$

zu

$$W = \frac{v_0^2}{g} \left(1 - \frac{1}{16} (7\sqrt{2} + 3 \ln(1 + \sqrt{2})) \frac{k v_0^2}{g} + \dots \right), \quad (4.157)$$

und

$$\Theta_m = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{32} (3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})) \frac{k v_0^2}{g} + \dots \quad (4.158)$$

Alternativ können wir auch für den extremalen Winkel

$$\sin[\Theta_m] = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{64} (6 - \sqrt{2} \ln[1 + \sqrt{2}]) \frac{k v_0^2}{g} + \dots \quad (4.159)$$

schreiben. Diese Relation kann nun direkt mit derjenigen von EULER (4.55) verglichen werden. Bei EULER steht als Vorfaktor von ν die Zahl $1/6$, doch nach der exakten Funktionalmethode muss der Vorfaktor

$$\frac{1}{64} (6 - \sqrt{2} \ln[1 + \sqrt{2}]) = \mathbf{0.07427421124} \dots \quad (4.160)$$

sein. Dies konnte auch durch numerische Simulationen bestätigt werden. Der wirkliche Zahlenfaktor beträgt also weniger als die Hälfte des Wertes von EULER aus dem Jahre 1745. Alternativ gilt natürlich auch

$$\tan[\Theta_m] = 1 - \frac{1}{16}(3\sqrt{2} - \ln[1 + \sqrt{2}]) \frac{k v_0^2}{g} + \dots \quad (4.161)$$

Die obigen Formeln sind natürlich nur für kleine Parameter ν brauchbar. Realistisch sind aber Werte von 1 bis 10. In diesem Fall gilt aber ein sehr genaues Skalierungsgesetz. Mit einem zunächst freien „Fitparameter“ α können wir nämlich für die Wurfweite sehr genau

$$W \sim \frac{v_0^2}{g} \left(1 + \frac{1}{16}(7\sqrt{2} + 3\ln[1 + \sqrt{2}]) \alpha \nu \right)^{-1/\alpha} \quad (4.162)$$

setzen, mit $\alpha \sim \mathbf{1.395}$. Numerisch gilt also für die maximale Schussweite bei nicht zu großen $\nu \equiv k v_0^2/g$ - Werten

$$W \sim \frac{v_0^2}{g} \left(1 + 1.094 \frac{k v_0^2}{g} \right)^{-0.717}. \quad (4.163)$$

Eine ähnliche Formel gilt auch für den optimalen Elevationswinkel Θ_m . Hier hat man sehr genau

$$\sin[\Theta_m] \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{32}(3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})) \alpha \nu \right)^{-1/\alpha}, \quad (4.164)$$

jetzt aber mit $\alpha \sim \mathbf{8.481}$. Numerisch gilt dann analog

$$\sin[\Theta_m] \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + 0.891 \frac{k v_0^2}{g} \right)^{-0.118}, \quad (4.165)$$

Die beiden Formeln (4.163) und (4.165) lösen das entscheidende Problem der Artillerie des 18. und 19. Jahrhunderts: Ist der ballistische Koeffizient k einer Kanonenkugel bekannt, so liefert (4.163) bei bekannter Entfernung die *minimal notwendige* Geschwindigkeit v_0 oder die entsprechende *minimal notwendige Pulvermasse* m_P , um das entfernte Ziel zu

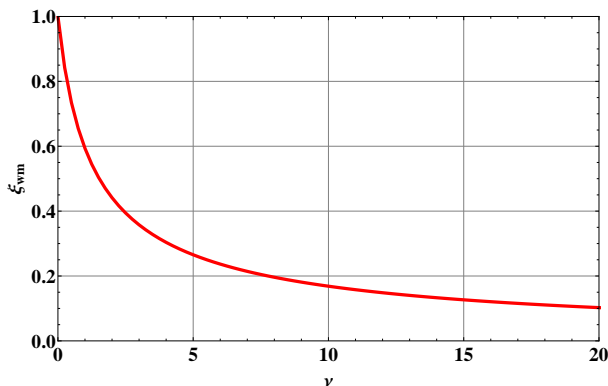


Fig. 4.23: Die maximale Wurfweite in Einheiten von v_0^2/g als Funktion des Parameters $\nu = k v_0^2/g$. Die durch numerische Integration gewonnenen Werte unterscheiden sich praktisch nicht von der semianalytischen Formel (4.163).

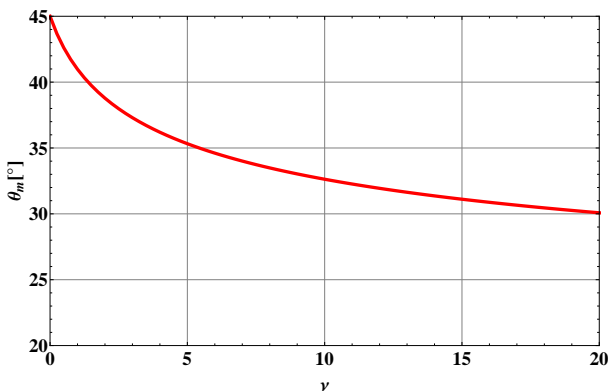


Fig. 4.24: Der optimale Abschusswinkel Θ_m für maximale Wurfweite als Funktion des Parameters $\nu = k v_0^2/g$. Die durch numerische Integration gewonnenen Werte unterscheiden sich praktisch nicht von der semianalytischen Formel (4.165).

erreichen¹³. Hauptproblem war wohl einerseits die Rotation der Kanonen-

¹³Im 18. Jahrhundert wurde in etwa $v_0 \approx \sqrt{m_P} \log(a/b)$ gerechnet, wobei in a/b die Rohrlänge (Kaliber) einging. Siehe Struensee: Anfangsgründe der Artillerie, Seite

kugel (Magnuseffekt; gezogene Rohre gab es erst ab etwa 1860) und die *Qualität* des Pulvers - nicht immer lieferte gleiche Pulvermasse m_P auch gleiche Abschussgeschwindigkeiten v_0 (siehe [67]). War das $v_0(m_P)$ dann bekannt, könnte man mit (4.165) den erforderlichen Elevationswinkel Θ_m des Rohres berechnen. Im Prinzip entspricht dies dem Vorgehen von vorgefertigten Schusstafeln. Die Formeln (4.163) und (4.165) waren allerdings in dieser Form im 18. wie im 19. Jahrhundert nicht bekannt.

Doch zurück zur ballistischen Kurve. In ähnlicher Weise lässt sich auch die Gipfelhöhe und deren Position in der Bahn bis zur ersten Ordnung in ν berechnen. Mit dem Ansatz

$$\xi_H = \frac{1}{2} \sin[2\Theta] - c_{1H}[\Theta] \nu + \dots \quad (4.166)$$

folgt wiederum mit Hilfe von Computeralgebra zunächst der Ausdruck

$$c_{1H}[\Theta] = \cos^2[\Theta] \eta_1' \left[\frac{1}{2} \sin[2\Theta] \right]. \quad (4.167)$$

oder explizit

$$x_H = \frac{v_0^2}{2g} \left\{ \sin[2\Theta] - \frac{4}{3} \nu \cos[\Theta] (1 - \cos[\Theta])^3 + \dots \right\}. \quad (4.168)$$

Die eigentliche Gipfelhöhe $y_H \equiv H$ der Bahn (Vertex) ergibt sich rein formal zu

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \left\{ \sin[\Theta]^2 + 2\nu \eta_1 \left[\frac{1}{2} \sin[2\Theta] \right] + O(\nu^2) \right\}. \quad (4.169)$$

Auch die in erster Ordnung ν korrigierte Flugzeit T kann durch die Funktion η_1 und ihre Ableitung ausgedrückt werden. Auf eine explizite Darstellung verzichten wir hier, bemerken aber noch, daß für beliebige Elevationswinkel $0 < \Theta < \pi/2$ zwischen der Gipfelhöhe und der Flugzeit die Relation

$$\boxed{H = \frac{1}{8} g T^2 \{1 + O[\nu]^2\}} \quad (4.170)$$

gilt. Denn der Zahlenfaktor proportional ν verschwindet gemäß

$$8\eta_1 \left[\frac{1}{2} \sin[2\Theta] \right] - 4\eta_1 [\sin[2\Theta]] + \sin[2\Theta] \eta_1' [\sin[2\Theta]] = 0. \quad (4.171)$$

Den Korrekturfaktor proportional ν^2 könnte man analog durch eine wesentlich aufwendigere Rechnung ableiten.

4.10 Asymptotische Zeitreihen

Bei Reihenentwicklungen nach der Zeit kann man entweder an analytische Approximationen für kleine Zeiten $t \rightarrow 0$ nach dem Abwurf oder an „globale“ asymptotische Entwicklungen für $t \rightarrow \infty$ denken. Die erste Art dieser Entwicklung ist sicherlich eng an die *Störungstheorie* für kleine $\nu \equiv k v_0^2/g$ gebunden. Zur besseren Veranschaulichung werden wir zunächst einen Spezialfall der ballistischen Kurve exakt lösen, nämlich für den Elevationswinkel $\Theta = -\pi/2$.

Im Falle $\Theta = -\pi/2$ wird eine Kanonenkugel „senkrecht“ nach unten abgeschossen. Die entsprechende Differentialgleichung für die Geschwindigkeitskomponente $v[t] \equiv y'[t]$ lautet dann

$$v'[t] - k v[t]^2 + g = 0 \quad (4.172)$$

mit der Anfangsbedingung $v[0] = -v_0$ (negatives Vorzeichen, weil nach „unten“ geschossen wird). Die Gleichung lässt sich exakt integrieren und man erhält

$$v[t] = -\sqrt{\frac{g}{k}} \tanh \left[\sqrt{k g} t + \operatorname{atanh} \left[\sqrt{\frac{k}{g}} v_0 \right] \right]. \quad (4.173)$$

Anhand dieser Lösung sieht man sofort, dass im Falle $t \rightarrow \infty$ die Grenzggeschwindigkeit $\sqrt{g/k}$ erreicht wird. Zweckmäßig ist die obige Lösung nur für $v_0 < \sqrt{g/k}$, in welchem Falle die Funktion $\operatorname{atanh}[z]$ reelle Werte liefert. Für den allgemeinen Fall ist es günstiger, die Formel durch eine Transformation in die Gestalt

$$v[t] = -\sqrt{\frac{g}{k}} \frac{v_0 \cosh[\sqrt{k g} t] + \sqrt{\frac{g}{k}} \sinh[\sqrt{k g} t]}{v_0 \sinh[\sqrt{k g} t] + \sqrt{\frac{g}{k}} \cosh[\sqrt{k g} t]} \quad (4.174)$$

zu bringen. Diese Formel kann leichter für alle Geschwindigkeitsverhältnisse ausgewertet werden.

Für kleine Zeiten t kann man die obige Formel in eine Taylorreihe nach k entwickeln. Dies entspricht einer „Störungstheorie“ nach dem

Parameter k . Man erhält sofort

$$v[t] = -v_0 - g t + k \left(v_0^2 t + v_0 g t^2 + \frac{1}{3} g t^3 \right) + \dots \quad (4.175)$$

Diese Entwicklung beschreibt sehr schön, wie die Fallbewegung durch den Luftwiderstand in den ersten „Sekunden“ modifiziert oder abgebremst wird. Sie zeigt aber auch, dass im Falle $k v_0^2 = g$, bei der eine gleichförmige Fallbewegung mit der Geschwindigkeit v_0 einsetzt, diese nur „in erster Näherung“ für kleine Zeiten beschrieben wird.

Diesen Nachteil sollte eine *asymptotische Entwicklung* für große Zeiten $t \rightarrow \infty$ nicht aufweisen. Eine asymptotische Formel ergibt sich sofort aus (4.174) in der Form

$$v[t] = -\sqrt{\frac{g}{k}} \left(1 + 2 \frac{\sqrt{\nu} - 1}{(\sqrt{\nu} + 1) e^{2\sqrt{k} g t} - (\sqrt{\nu} - 1)} \right) \quad (4.176)$$

oder entwickelt

$$v[t] = -\sqrt{\frac{g}{k}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\nu} - 1}{\sqrt{\nu} + 1} \right)^n e^{-2n\sqrt{k} g t} \right). \quad (4.177)$$

Bemerkenswert ist aber hier, dass diese Funktionsreihe für *alle Zeiten* t gültig und konvergent ist. Durch Integration erhält man die Weg-Zeitfunktionsreihe

$$\begin{aligned} y[t] &= \frac{1}{k} \ln \left(\frac{2}{1 + \sqrt{\nu}} \right) - \sqrt{\frac{g}{k}} t + \\ &\quad \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\nu} - 1}{\sqrt{\nu} + 1} \right)^n \frac{e^{-2n\sqrt{k} g t}}{n} \end{aligned} \quad (4.178)$$

für einen Senkrechtschuß **nach unten**.

Diese Ergebnisse legen es nahe, auch für die allgemeine ballistische Bewegung eine Reihenentwicklung nach der Zeitfunktion $e^{-\sqrt{k} g t}$ zu versuchen. Dazu führen wir also anstatt der Realzeit t eine Pseudozeit - Variable ζ gemäß der Gleichung

$$\zeta = e^{-\sqrt{k} g t} \equiv e^{-\tau} \quad (4.179)$$

ein. $\zeta = 1$ bedeutet dann den Startpunkt, $\zeta = 0$ den unendlich fernen Zeitpunkt $t \rightarrow \infty$. Außerdem gilt

$$-\sqrt{bg} dt = \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (4.180)$$

Die gekoppelten Bewegungsgleichungen des Geschwindigkeitsvektors lauten dann

$$\zeta \frac{dv_x}{d\zeta} - \sqrt{\frac{k}{g}} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_x = 0, \quad (4.181)$$

$$\zeta \frac{dv_y}{d\zeta} - \sqrt{\frac{k}{g}} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_y - \sqrt{\frac{g}{k}} = 0. \quad (4.182)$$

da die asymptotische Geschwindigkeit der ballistischen Flugbahn $\sqrt{g/k}$ ist, erhält man mit der Skalierung

$$v_x = \sqrt{\frac{g}{k}} v_\xi; \quad v_y = \sqrt{\frac{g}{k}} v_\eta, \quad (4.183)$$

die dimensionslosen gekoppelten Gleichungen

$$\zeta \frac{dv_\xi}{d\zeta} - \sqrt{v_\xi^2 + v_\eta^2} v_\xi = 0, \quad (4.184)$$

$$\zeta \frac{dv_\eta}{d\zeta} - \sqrt{v_\xi^2 + v_\eta^2} v_\eta - 1 = 0. \quad (4.185)$$

Die Lösungen dieser Gleichungen nach ζ kann man in der asymptotischen Form

$$\begin{aligned} v_\xi = A \zeta + \frac{1}{8} A [A^2 - 8B + 2A^2 \ln(\zeta)] \zeta^3 + \frac{1}{256} A [3A^4 - 16A^2 B \\ + 256k^2 + 4(A^4 - 32A^2 B) \ln(\zeta) + 16A^4 \ln(\zeta)^2] \zeta^5 + \dots \end{aligned} \quad (4.186)$$

und

$$\begin{aligned} v_\eta = -1 + 2 \left[B - \frac{1}{2} A^2 \ln(\zeta) \right] \zeta^2 - 2 \left[B - \frac{1}{4} A^2 \ln(\zeta) \right]^2 \zeta^4 \\ + \left[2 \left(B - \frac{1}{4} A^2 \ln(\zeta) \right)^3 - \frac{1}{512} A^4 (A^2 - 24B + 6A^2 \ln(\zeta)) \right] \zeta^6 - \dots \end{aligned} \quad (4.187)$$

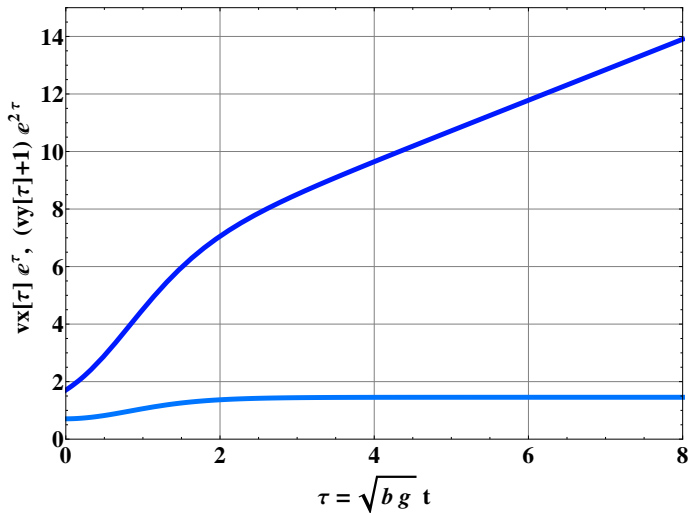


Fig. 4.25: Das asymptotische Verhalten des Geschwindigkeitsvektors bei einer ballistischen Kurve im Falle $\nu = 1$ und $\Theta = 35^\circ$, normiert auf die Grenzggeschwindigkeit $\sqrt{g/k}$. Die untere horizontale hellblaue Gerade zeigt, dass sehr nahe $v_x[t]$ sich wie $\exp(-\sqrt{k g} t)$ verhält, während die obere dunkelblaue Gerade die Proportionalität $v_y[t] + \sqrt{g/k} \propto +t \exp(-2\sqrt{k g} t)$ aufweist. Diese Entdeckung war für den Autor Grund genug, eine asymptotische Theorie der ballistischen Kurve nach den Potenzen der Zeitfunktionen $\exp(-\sqrt{k g} t)$ zu entwickeln.

schreiben. Die Größen A und k sind zwei *asymptotische* Integrationskonstanten der gekoppelten Differentialgleichungen (4.184) und (4.185). Sie hängen mit dem Hodographen der ballistischen Kurve (4.102) durch die bemerkenswerte Beziehung

$$\boxed{\mathbf{C}_H = -\frac{1}{2} + \frac{4B}{A^2} + \ln\left(\frac{A}{2}\right)} \quad (4.188)$$

zusammen. Der Wert der Konstanten \mathbf{C}_H wird ja bekanntlich durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Wegen $\zeta = e^{-\tau}$ lassen sich aus den Reihenentwicklungen sofort folgende asymptotische Beziehungen ableiten

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^\tau v_\xi = A, \quad (4.189)$$

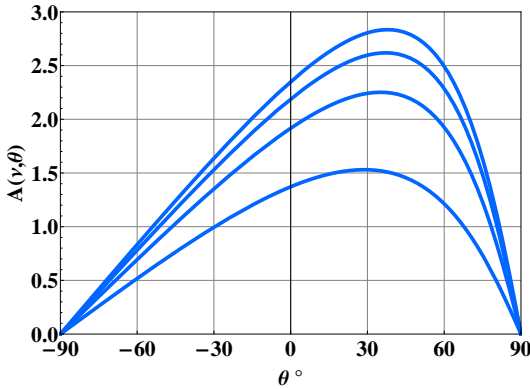


Fig. 4.26: Der asymptotische Koeffizient $A(\nu, \Theta)$ als Funktion des Elevationswinkels Θ für die Parameterwerte $\nu = 1, 4, 9, 16$. Werte durch numerische Integration des Pfadintegrals abgeleitet.

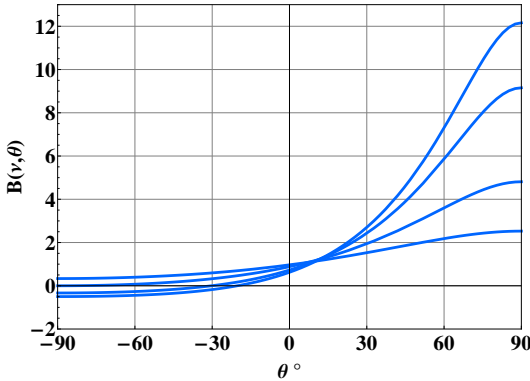


Fig. 4.27: Der asymptotische Koeffizient $B(\nu, \Theta)$ als Funktion des Elevationswinkels Θ für die Parameterwerte $\nu = 1/4, 1, 4, 9$. Werte auch hier durch numerische Integration abgeleitet.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{2\tau} (v_\eta(\tau) + 1) = 2B + \frac{1}{2} A^2 \tau. \quad (4.190)$$

Die Gültigkeit dieser Relationen konnte durch numerische Integration sehr schön bestätigt werden (siehe Fig. 4.25). Die Darstellung der Konstanten A und k bereitet aber für den allgemeinen Fall Schwierigkeiten. Im

Spezialfall $\Theta = -\pi/2$ ergibt sich aber wie oben

$$B = \frac{1 - \sqrt{\nu}}{1 + \sqrt{\nu}}; \quad A = 0. \quad \{\Theta = -\pi/2\} \quad (4.191)$$

Wir bemerken noch, daß

$$\frac{1 - \sqrt{\nu}}{1 + \sqrt{\nu}} = e^{-2 \operatorname{atanh}(\sqrt{\nu})} \quad (4.192)$$

gilt. Diese Relation wird dann interessant, wenn wir den asymptotischen Fall für den Senkrechtschuß $\Theta = +\pi/2$ betrachten. In diesem Fall setzt sich der Zeitablauf aus der Aufstiegszeit T_1 und der dann folgenden Zeit im freien Fall mit der Anfangsgeschwindigkeit Null zusammen. Wir werden später noch zeigen, daß für die Aufstiegszeit zum Gipfelpunkt die Formel

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{g}k} \arctan(\sqrt{\nu}) \quad (4.193)$$

gilt (siehe (4.201)). Wir benutzen nun die Formel (4.177), setzen in ihr $\nu = 0$, machen dann aber die Zeittransformation $t \rightarrow t - T_1$. In der asymptotischen Formel ergeben sich dann für die Konstanten A und k im Spezialfall des Senkrechtsschusses zu

$$B = e^{2 \arctan(\sqrt{\nu})}; \quad A = 0. \quad \{\Theta = +\pi/2\} \quad (4.194)$$

Dabei gilt mit der imaginären Einheit $i^2 = -1$ die bemerkenswerte mathematische Identität

$$\left(\frac{1 - i\sqrt{\nu}}{1 + i\sqrt{\nu}} \right)^i = e^{2 \arctan(\sqrt{\nu})}. \quad (4.195)$$

Dieser Ausdruck für den Parameter k gilt nur asymptotisch in der Zeit, also nur für $t > T_1$.

Für beliebige Zwischenwinkel Θ ist es möglich, eine Darstellung durch ein *Pfadintegral im Geschwindigkeitsraum* zu gewinnen. Dazu erinnern wir uns an die exakte Formel (4.17) und vergleichen sie mit (4.189). Dann muss gelten

$$A(\nu, \Theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\nu} \cos[\Theta] \exp\left(\sqrt{k} g t - k s[t]\right) \quad (4.196)$$

oder

$$A(\nu, \Theta) = \sqrt{\nu} \cos[\Theta] \exp \left(\int_0^\infty (1 - |\mathbf{v}(\tau)|) d\tau \right). \quad (4.197)$$

Der Parameter $B(\nu, \Theta)$ kann dann mit dem Hodographen ebenfalls als *Pfadintegral* dargestellt werden. In den Figuren (4.26) und (4.27) sind diese asymptotischen Parameter als Funktion des Elevationswinkels für einige Werte von ν bildlich dargestellt.

4.11 Der senkrechte Schuss

Die Theorie des Senkrechtsschusses hat schon L. EULER in seinem Werk über Artillerie von 1745 behandelt. Die Kanonenkugel wird dabei senkrecht – wie eine Rakete – entlang des gravitativen Lotes in die Luft abgeschossen. Das Ganze geschieht natürlich nur aus wissenschaftlichem Interesse. Für diesen Fall vereinfachen sich die Differentialgleichungen erheblich und man kann mit den elementaren analytischen Funktionen die raum - zeitliche Bewegung exakt integrieren. JOHANN BERNOULLI hat offensichtlich solche *ballistischen* Experimente in Petersburg um 1735 durchgeführt und beobachtet, daß seine Kanonenkugel nach $T = 34$ Sekunden dicht am Abschussort wieder aufschlug. Macht man diesen Senkrechtschuß heute mit einem G3 Sturmgewehr, so schlägt die Patrone nach etwa $T = 47$ Sekunden wieder auf¹⁴.

Die Bewegungsgleichungen müssen nun in zwei Abschnitte aufgeteilt werden: Den *aufsteigenden* Ast und den *absteigenden* Ast. Die beiden unterschiedlichen Differentialgleichungen lauten jetzt

$$\dot{v} = -kv^2 - g \quad \text{aufsteigender Ast} \quad (4.198)$$

$$\dot{v} = +kv^2 - g \quad \text{absteigender Ast} \quad (4.199)$$

Im ersten Fall wirken Luftreibung und Schwerebeschleunigung in die gleiche Richtung, im zweiten Fall in entgegengesetzte Richtungen.

¹⁴Die zurückkommende Patrone in einem solchen Senkrechtschuß hat dabei eine Geschwindigkeit von etwa 150m/s.

Aufsteigender Ast: Mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ lautet die Lösung der Gleichung (4.198)

$$v[t] = \sqrt{\frac{g}{k}} \tan \left[\arctan \left[\frac{v_0}{\sqrt{g/k}} \right] - \sqrt{gk} t \right] \quad (4.200)$$

Die Zeitdauer T_1 bis zum Gipfelpunkt ist dann durch $v(T_1) \equiv 0$ oder

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{gk}} \arctan \left[\frac{v_0}{\sqrt{g/k}} \right] \quad (4.201)$$

gegeben. Für die Höhe $h[t]$ folgt dann unmittelbar durch Integration und $h(0) = 0$

$$h[t] = \frac{1}{k} \ln \left[\frac{\cos \left[\arctan \left[\frac{v_0}{\sqrt{g/k}} \right] - \sqrt{gk} t \right]}{\cos \left[\arctan \left[\frac{v_0}{\sqrt{g/k}} \right] \right]} \right] \quad (4.202)$$

Die Höhe $H \equiv h(T_1)$ des Gipfelpunktes ergibt sich zu

$$H = -\frac{1}{k} \ln \left[\cos \left[\sqrt{gk} T_1 \right] \right] \quad (4.203)$$

oder durch Umkehrung die wichtige Beziehung

$$\boxed{T_1 = \frac{1}{\sqrt{gk}} \arccos \left[e^{-kH} \right]}. \quad (4.204)$$

Setzt man andererseits in (4.203) für T_1 die Formel (4.201) ein, so folgt wiederum mit $\mu = g/(kv_0^2)$ die *exakte* Formel für die Gipfelhöhe

$$H = \frac{1}{2k} \ln \left[1 + \frac{kv_0^2}{g} \right]. \quad (4.205)$$

Eine ganz andere Formel gilt jetzt aber für den Rückfall auf die Erdoberfläche.

Absteigender Ast: Definiert man die nach „unten“ gerichtete Geschwindigkeit negativ, so ergibt eine erste Integration von (4.199) mit der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ die Lösung

$$v[t] = -\sqrt{\frac{g}{k}} \tanh \left[\sqrt{gk} t \right] \quad (4.206)$$

Eine weitere Integration ergibt mit der Anfangsbedingung $h(0) = H$ die Fallhöhe als Funktion der Zeit zu

$$h[t] = H - \frac{1}{k} \ln \left[\cosh \left[\sqrt{gk} t \right] \right]. \quad (4.207)$$

Nach der Fallzeit T_2 schlägt die Kanonenkugel wieder auf dem Boden auf, wobei gilt

$$H = \frac{1}{k} \ln \left[\cosh \left[\sqrt{gk} T_2 \right] \right] \quad (4.208)$$

oder durch Umkehrung

$$\boxed{T_2 = \frac{1}{\sqrt{gk}} \operatorname{arccosh} \left[e^{kH} \right].} \quad (4.209)$$

Die Formeln für T_1 und T_2 hängen durch die Transformation des ballistischen Koeffizienten $k \rightarrow -k$ miteinander zusammen. Dies kann man auch aus den entsprechenden Differentialgleichungen sehen. Es hätte also eigentlich genügt, nur den aufsteigenden Ast zu betrachten und für den absteigenden k durch $-k$ zu ersetzen. Dies hat auch schon EULER 1745 gesehen und ausgenutzt.

Die gesamte Flugzeit $T = T_1 + T_2$ beträgt somit

$$\boxed{T = \frac{1}{\sqrt{gk}} \left(\arccos \left[e^{-kH} \right] + \operatorname{arccosh} \left[e^{kH} \right] \right).} \quad (4.210)$$

Bei ballistischen Versuchen zu Beginn des 18. Jahrhunderts konnte man diese Flugzeit eines Senkrechtsschusses recht genau messen, im Gegensatz zur Gipfelhöhe der Kugel. So nahm der erst 20jährige L. EULER an Versuchen teil, die 1727 in Sankt Petersburg unter Leitung von General GUNTHER und dem damals 27jährigen D. BERNOULLI durchgeführt

wurden. Ergebnisse dieser Versuche veröffentlichte D. BERNOULLI dann in seiner *Hydrodynamica* 1748. Die damalige Flugzeit der verwendeten kleinen Kanonenkugeln war etwa $T \sim 34$ Sekunden. Es liegt daher der Gedanke nahe, die obige Beziehung nach der Größe H umzukehren. Mit Hilfe von Computeralgebra erhält man mit der dimensionslosen Zahl

$$\lambda = \frac{1}{8} k g T^2$$

die interessante Reihe

$$H = \frac{1}{8} g T^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{\lambda^4}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} - \frac{67 \lambda^6}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13} + \frac{1567 \lambda^8}{2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 13 \cdot 17} - \dots \right) \quad (4.211)$$

die in ähnlicher Form zum erstenmal L. EULER 1745 für ein modifiziertes Widerstandsgesetz aufgeschrieben hat. Wie man sieht, gilt trotz Luftwiderstand recht genau zwischen der Gipfelhöhe und der Flugzeit die aus der parabolischen Theorie bekannte Beziehung $8H = gT^2$. Alle diese Dinge waren auch in den *preußischen Artillerieschulen* gegen Ende des 19. Jahrhunderts bekannt: So schreibt W. HEYDENREICH in seinem Buch von 1898 in Abteilung II, Seite 76 ([26]):

Bemerkenswert ist, daß die Formel $H = gT^2/8$ auch mit großer Annäherung für die Flugbahn im luftgefüllten Raum gilt, so daß man nach Einführung des Zahlenwertes von $g = 9.81$, sobald die Flugzeit T (in Sekunden) gemessen ist, man in $H = 1.2 T^2$ die annähernde Steighöhe des Geschosses erhält.

Um ein konkretes Beispiel vor Augen zu haben, nehmen wir für die Patrone eines G3 - Gewehres bei einem Senkrechtschuß eine Flugzeit von $T_F = 47[s]$ an. Mit $g = 9.81 [m/s^2]$ ergibt sich so zunächst nach (4.211) für die Steighöhe *ohne Korrekturterm*

$$H \approx 2709 \text{ m} \quad (4.212)$$

Um die Korrektur durch den Luftwiderstand zu berechnen, muss die inverse Länge k abgeschätzt werden. Für sie gilt nach (4.48) die Formel

$$k \approx c_w(\mathcal{M}) \frac{\pi D^2 \varrho_{Luft}}{8 m_{Pat}}, \quad (4.213)$$

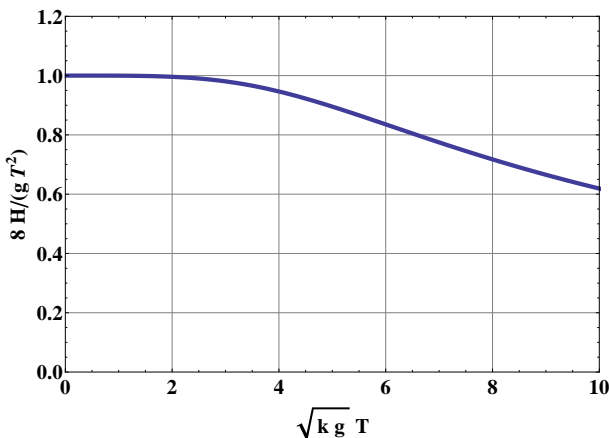


Fig. 4.28: Die erreichte Gipfelhöhe H und die Flugzeit T beim Senkrechtschuß erfüllt trotz des Luftwiderstands sehr gut die klassische Beziehung $H = gT^2/8$. Berechnet wurde der Kurvenverlauf mit der Umkehrung der Formel (4.210).

Mit $c_w \approx 0.15$, $D = 0.00762 \text{ [m]}$, $\varrho_{Luft} = 1.21 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ und $m_{Pat} = 0.0106 \text{ [kg]}$ ergibt sich so

$$k = 3.90 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^{-1}\text{]}, \quad \sqrt{g/k} = 158 \text{ [m/s]}. \quad (4.214)$$

Damit folgt $\lambda \approx 1$ und mit Korrekturterm nach (4.211) für die korrigierte Steighöhe

$$H \approx 2651 \text{ m} \quad (4.215)$$

Die erreichte Gipfelhöhe wird also gegenüber (4.212) um **58m** nach unten korrigiert. Durch Radarmessungen wird diese Höhe auch bestätigt, obwohl die Patrone sich etwa 2 Sekunden im *supersonischen Bereich* aufhält. Der Unterschied zur klassischen parabolischen Theorie bezüglich Steighöhe und Flugzeit ist also tatsächlich gering. Zum Abschluss sollen noch zwei Formeln für die Anfangsgeschwindigkeit v_0 und die Aufprallgeschwindigkeit v_T angegeben werden. Sie folgen leicht aus den obigen

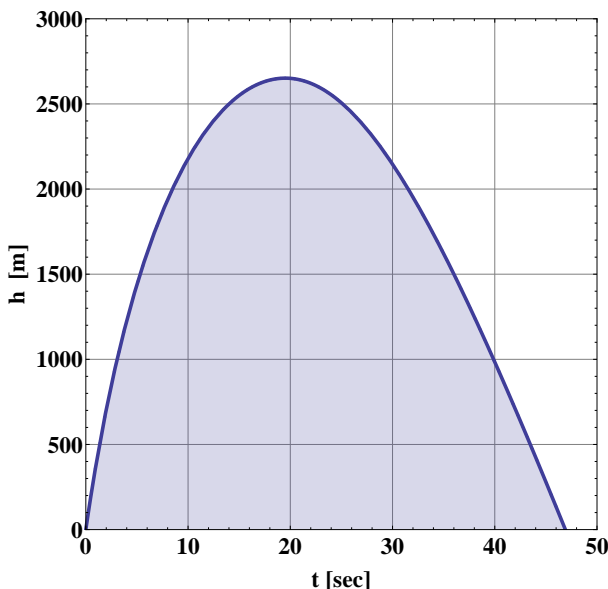


Fig. 4.29: Die erreichte Höhe einer 7.62 mm Patrone beim Senkrechtschuß eines G3 Gewehres als Funktion der Zeit. Nach etwa 19.5 sec wird die Gipfelhöhe von etwa 2600 Metern erreicht. Dieser Punkt stellt eine Art Singularität dar, da die Formeln für das Weg - Zeit Gesetz vor und nach dem Gipfelpunkt unterschiedlich sind.

Gleichungen und lauten

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{e^{2kH} - 1}, \quad (4.216)$$

$$v_T = \sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{1 - e^{-2kH}}. \quad (4.217)$$

Beide hängen durch die Transformation $k \rightarrow -k$ zusammen. Mit den obigen Daten ergibt sich $kH \approx 1.04$ und so

$$v_0 \approx \mathbf{417 \, m/s}, \quad v_f \approx \mathbf{148 \, m/s}. \quad (4.218)$$

Die wahre Abschussgeschwindigkeit dürfte aber etwas höher sein, denn sie liegt im *supersonischen* Bereich, wo der c_w Wert etwas höher ist wie im

subsonischen Bereich. Man kann von etwa **600m/s** ausgehen. Siehe auch Figur (4.29). Auch hier erkennt man eine gewisse „Symmetriebrechung“ zwischen dem aufsteigenden und dem absteigenden Ast.

Bevor wir im nächsten Kapitel den freien Fall aus sehr großer Höhe genauer betrachten, können wir zunächst die Formel für die Gesamtflugzeit (4.210) mathematisch direkter herleiten. Hierzu betrachten wir nur den absteigenden Ast mit der Differentialgleichung (4.199). Dort betrachten wir die Geschwindigkeit $v \rightarrow v[h]$ als Funktion der Höhe h . Wegen

$$\frac{d}{dt} = v \frac{d}{dh} \quad (4.219)$$

folgt sofort

$$v \frac{dv}{dh} = k v^2 - g \quad \{\text{absteigender Ast}\} \quad (4.220)$$

Diese Differentialgleichung können wir mit der Anfangsbedingung im Gipfelpunkt $v[H] = 0$ lösen und erhalten sofort

$$v[h] = -\sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{1 - e^{2k(h-H)}}. \quad (4.221)$$

Für den *aufsteigenden Ast* brauch wir hier nur die Transformation $k \rightarrow -k$ vornehmen. Die Kenntnis der Abschussgeschwindigkeit v_0 ist dann automatisch in der Formel enthalten.

Die Fallzeit T_2 erhält man einfach aufgrund der elementaren Beziehung

$$dh = v dt.$$

Damit erhält man das Integral

$$T_2 = \sqrt{\frac{k}{g}} \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{1 - e^{-2k h}}}. \quad (4.222)$$

Auswerten führt zu dem alternativen Resultat

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{g k}} \operatorname{arctanh} \left[\sqrt{1 - e^{-2k H}} \right]. \quad (4.223)$$

Die beiden Formeln (4.209) und (4.223) sind zueinander äquivalent. Für den aufsteigenden Ast braucht man nur $k \rightarrow -k$ zu setzen. Für die

gesamte Flugzeit folgt somit alternativ

$$T = \frac{1}{\sqrt{gk}} \left\{ \arctan \left[\sqrt{e^{2kH} - 1} \right] + \operatorname{arctanh} \left[\sqrt{1 - e^{-2kH}} \right] \right\}.$$

Dies entspricht letztendlich einer analytischen Fortsetzung. Die eigentlich Abschussgeschwindigkeit v_0 am Boden können wir berechnen, aber brauchen wir nicht zu wissen.

4.12 Senkrechter Schuss in große Höhen

Im vorherigen Kapitel wurde die Bewegung beim senkrechten Schuss unter der Voraussetzung *konstanter Luftdichte* betrachtet. Dies ist bei einer Gipfelhöhe von maximal 2000 Metern noch eine gute Näherung, wird aber bei sehr großen Höhen mehr und mehr unrealistisch. In etwa 5500 Metern Höhe hat sich die Luftdichte im Mittel schon halbiert. Dieser Effekt darf also nicht mehr vernachlässigt werden. So konnte im Zweiten Weltkrieg die **8.8cm - FlaK41** oder **12.8cm - FlaK40** Flugabwehrkanonen bei einer Mündungsgeschwindigkeit von $v_0 = 820 - 1000 \text{ m/s}$ eine maximale Schusshöhe von etwa $H = 10400 - 14700 \text{ m}$ erreichen. Wichtig war hier die Berechnung der Flugzeit für eine gemessene Höhe, um daraus den Vorhalt der Kanone und die Einstellung des Zeitzünders abzuleiten.

Die gegenüber (4.198) und (4.199) erweiterten Gleichungen einer senkrechten Aufwärts - oder Abwärtsbewegung mit abnehmenden Luftdichte lauten für eine isotherme Standardatmosphäre ($v = dh/dt$)

$$\dot{v} = -k \exp[-h/H_S] v^2 - g \quad (\text{Aufsteigen}) \quad (4.224)$$

$$\dot{v} = +k \exp[-h/H_S] v^2 - g \quad (\text{Absteigen}) \quad (4.225)$$

Beim Aufstieg ist hier v positiv, beim Abstieg ist v negativ. Der ballistische Koeffizient k hängt normalerweise von der *Machzahl* und der *Reynoldszahl* ab. Im folgenden werden wir ihn als Konstante ansehen, was im *hypersonischen Bereich* keine schlechte Annahme ist. Die Luftdichte folgt in unserem Modell einer einfachen *isothermen barometrischen Höhenformel nach Laplace* mit der Skalenhöhe H_S . Ein typischer Wert für die Skalenhöhe der Erdatmosphäre ist $H_S \approx 8000 \text{ [m]}$. Die Gravitationsbeschleunigung g soll in unserem idealisierten Modell konstant sein. Wendet man die Transformation

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \frac{dh}{dt} \equiv v \frac{dv}{dh} \quad (4.226)$$

an, so lautet die Gleichung für den absteigenden Ast (auf diesen können wir uns hier beschränken)

$$v \frac{dv}{dh} = k e^{-h/H_S} v^2 - g. \quad (4.227)$$

Es scheint günstig, die Irrationalität der e-Funktion durch Einführung einer neuen Höhenvariablen

$$\eta = e^{-h/H_S}; \quad \frac{d\eta}{\eta} = -\frac{dh}{H_S} \quad (4.228)$$

zu eliminieren. Die Differentialgleichung für den absteigenden Ast nimmt dann die Gestalt

$$v \frac{dv}{d\eta} + k H_S v^2 - \frac{g H_S}{\eta} = 0 \quad (4.229)$$

an. Ihre Lösung mit der Anfangsbedingung $v[\eta_0] = 0$ lautet für positiv definierte Abwärtsgeschwindigkeit

$$v[\eta] = \sqrt{2 g H_S} e^{-k H_S \eta} \sqrt{\mathbf{Ei}[2 k H_S \eta] - \mathbf{Ei}[2 k H_S \eta_0]} \quad (4.230)$$

mit

$$\eta = e^{-h/H_S}, \quad \eta_0 = e^{-H/H_S}. \quad (4.231)$$

Die Funktion $\mathbf{Ei}[x]$ ist durch den *Cauchy - Hauptwert* des Integrals

$$\mathbf{Ei}[x] = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \quad (4.232)$$

definiert. Die so gewonnene Formel kann sofort auch für den aufsteigenden Ast durch $k \rightarrow -k$ abgeleitet werden. So ergeben sich für die Abgangsgeschwindigkeit v_0 und die Aufprallgeschwindigkeit v_T die Formeln

$$v_0 = \sqrt{2 g H_S} e^{k H_S} \sqrt{\mathbf{Ei}[-2 k H_S] - \mathbf{Ei}[-2 k H_S \eta_0]} \quad (4.233)$$

$$v_T = \sqrt{2 g H_S} e^{-k H_S} \sqrt{\mathbf{Ei}[2 k H_S] - \mathbf{Ei}[2 k H_S \eta_0]}. \quad (4.234)$$

Nehmen wir als Zahlenbeispiel $H_S = 8000$ m, für den aerodynamischen Koeffizienten $k = 10^{-4}$ /m von schweren Geschossen. Dann erhält man mit der obigen Formel für die zu erreichende Gipfelhöhe von $H = 14000$ m eine notwendige Mündungsgeschwindigkeit v_0 am Boden von etwa

$$v_0 \approx 825 \text{ m/s} \quad (4.235)$$

Die eigentliche Flugzeit bis zur Gipfelhöhe H und zurück zum Boden ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_0} = & \frac{1}{4} \sqrt{\frac{H_S}{H}} \int_{\eta_0}^1 \frac{e^{k H_S \eta} d\eta}{\eta \sqrt{\mathbf{Ei}[2 k H_S \eta] - \mathbf{Ei}[2 k H_S \eta_0]}} + \\ & \frac{1}{4} \sqrt{\frac{H_S}{H}} \int_{\eta_0}^1 \frac{e^{-k H_S \eta} d\eta}{\eta \sqrt{\mathbf{Ei}[-2 k H_S \eta] - \mathbf{Ei}[-2 k H_S \eta_0]}}, \end{aligned} \quad (4.236)$$

wobei

$$T_0 = \sqrt{\frac{8 H}{g}} \quad (4.237)$$

die Flugzeit ohne Luftwiderstand bedeutet. Die Auswertung des Integrals kann nur noch numerisch erfolgen. Es zeigt sich, dass mit Luftwiderstand und $k < 10^{-3}$ das Verhältnis T/T_0 *weniger als 1% über 1 liegt*. Für die Flugzeit kann man also den Luftwiderstand praktisch vernachlässigen.

4.13 Der freie Fall aus großer Höhe

Während allgemeine Situationen nur noch numerisch gerechnet werden können, lässt sich der Spezialfall des *freien Falles aus großer Höhe* (z.B. *Stratosphäre*) nach den Ergebnissen des vorhergehenden Kapitels noch relativ einfach analytisch berechnen. Zwei Fragen sind hier besonders interessant:

- a) In welcher Höhe erreicht der fallende Körper maximale Geschwindigkeit?
- b) In welcher Höhe ist die Abbremsung durch die Luft maximal?

Diese Fragen sollen hier kurz diskutiert werden.

Für den freien Fall aus **sehr großer Höhe**¹⁵ senkrecht zum Boden ist jetzt die Gleichung (6.91) relevant.

¹⁵Angeregt wurde diese Untersuchung durch das Projekt *RED BULL STRATOS* vom 14.10.2012

Mit der so gewonnenen Formel lassen sich die zwei zu Beginn gestellten Fragen vollständig beantworten.

Die maximale Geschwindigkeit wird zu dem Zeitpunkt erreicht, wenn die effektive Beschleunigung \dot{v} null wird. Dies führt mit (6.91) zu der Bedingung

$$k \eta_m v[\eta_m]^2 = g \quad (4.238)$$

In den Abbildungen (4.30) und (4.31) kann man im Vergleich sehen, wie der Punkt maximaler Geschwindigkeit mit der Linie $a/g = 1$ zusammenfällt. Wenn der fallende Körper die Maximalgeschwindigkeit erreicht hat,

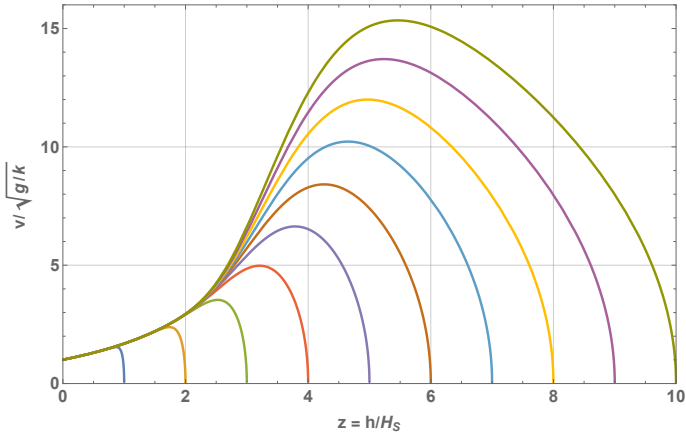


Fig. 4.30: Der Verlauf der Fallgeschwindigkeit in Einheiten von $\sqrt{g/k}$ als Funktion der Höhe $z = h/H_S$ für 10 anfängliche Fallhöhen H in Einheiten von H_S . Die Kennzahl $\alpha = 2kH_S$ hat hier den Wert 64. Maximal wird die Geschwindigkeit dort, wo die Bremsbeschleunigung den Wert g erreicht.

wird er durch den Luftwiderstand genau mit der Erdbeschleunigung g abgebremst. Doch dies ist nicht der Punkt maximaler Abbremsung. Erst etwas tiefer in der immer dichter werdenden Atmosphäre erfährt der Körper maximale Abbremsung. Man erhält das überraschende Resultat, dass im Grenzfall sehr großer Fallhöhen der Punkt maximaler Abbremsung durch die asymptotische Formel

$$H_a = H_S \ln(2kH_S) - \dots \quad (4.239)$$

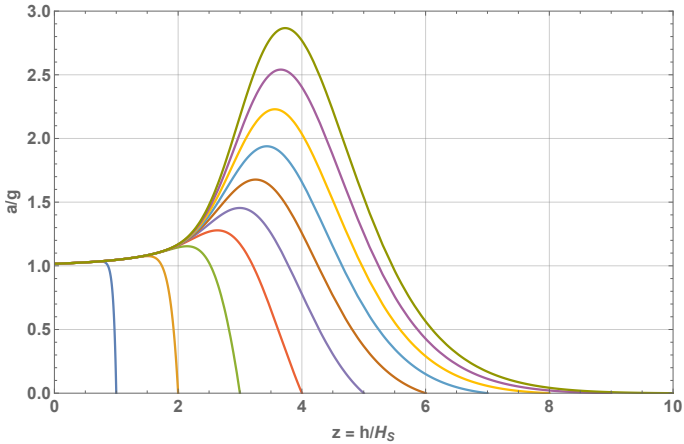


Fig. 4.31: Der Verlauf der Bremsbeschleunigung in Einheiten von g als Funktion der Höhe $z = h/H_S$ für 10 anfängliche Fallhöhen H in Einheiten von H_S . Die Kennzahl $\alpha = 2kH_S$ hat hier wieder den Wert 64. Auf der horizontalen Linie $a/g \equiv 1$ schneiden die Kurven den Punkt maximaler Geschwindigkeit.

gegeben ist. Diese Beziehung wurde so zum erstenmal von J.H. ALLEN (1910-1977) und A. EGGERS 1953 veröffentlicht („Blunt-Body“ („Stumpfer Körper“); [1]).

Die so gewonnenen Ergebnisse wollen wir an den konkreten Daten des Rekordsprunges von F. Baumgartner aus dem Jahre 2012 aus fast 40 km Höhe testen. Das *Red Bull Stratos Team* hat leider nur fünf Datenpunkte der Fallkurve veröffentlicht, die in folgender Tabelle (4.3) zusammengefasst sind: Mit der Erdbeschleunigung $g = 9.8065 \text{ m/s}^2$ ergeben sich die wahrscheinlichsten Parameter zu

$$\begin{aligned} v_\infty &= \sqrt{\frac{g}{k}} = 39 \pm 7 \text{ [m/s]} \\ H_S &= 6390 \pm 530 \text{ [m]} \end{aligned}$$

Obwohl die Varianz dieser Parameter recht groß ist, stellt die erhaltene Kurve die Datenpunkte relativ gut dar (siehe 4.32). Rechnet man mit

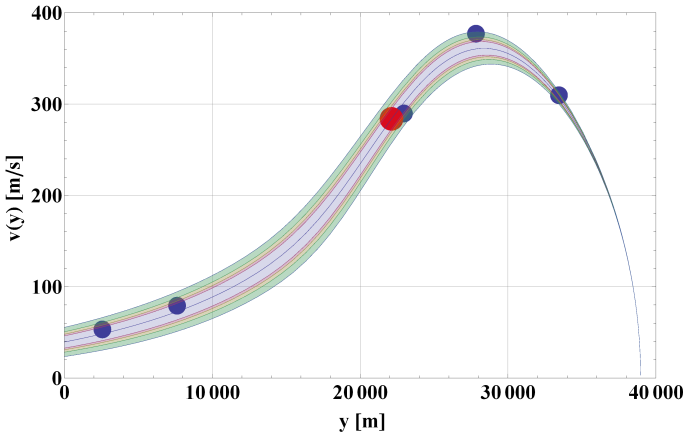


Fig. 4.32: Die Fallgeschwindigkeit als Funktion der Höhe beim Fallschirmsprung von F. BAUMGARTNER im Red Bull Stratos Projekt in Roswell, New Mexico, am 14.10.2012. Die fünf veröffentlichten Datenpunkte des Rekordsprunges mit den entsprechenden Zeiten lassen sich recht gut an die theoretische Funktion (6.91) anpassen. Der rote Punkt bezeichnet die Höhe maximaler Luftbremsung, bei der beim freien Fall von Baumgartner auch die „flat - spin“ Instabilität einsetzte. Die farbigen Bereiche kennzeichnen die 60, 70, 80 und 90 % Vertrauensbereiche der Kurvenanpassung.

$t[s]$	$H[m]$	$v[m/s]$	$v_{model}[m/s]$	$t_{model}[s]$
0	38969.4	0.0	0.0	0.0
34	33446.0	309.7	306.7	34.2
50	27833.0	377.1	360.4	50.5
64	22966.7	289.7	301.8	64.9
180	7619.3	79.2	72.7	179.6
260	2567.0	53.2	48.4	265.5

Tab. 4.3: Die bekannten Eckdaten des freien Falles von F. Baumgartner im Red Bull Stratos Team aus etwa 40km Höhe vom 14.10.2012. Zum Vergleich zeigen die beiden letzten Spalten die Best-Fit Daten des Modelles.

der wahrscheinlichsten Funktion die Zeiten nach der exakten Formel

$$T_F = \int_0^H \frac{dy}{v[y]} \approx \sqrt{\frac{2H}{g}} \left(1 + \frac{1}{2} k H_S \frac{H_S}{H} + \dots \right) \quad (4.240)$$

aus, so ergeben sich anstatt der Zeiten in der Tabelle die Zahlen 0, 34.2, 50.5, 64.9, 179.6 und 265.5 [s]. Die analytische Näherung zeigt, dass die Fallzeiten mit Luftwiderstand natürlich immer größer als im Vakuum sind. Auch die Zeitmarken stimmen relativ genau mit den offiziellen Angaben überein. Das quadratische Luftwiderstandsgesetz und/oder die exponentielle Abnahme der Luftdichte mit der Höhe scheinen in dem betrachteten Bereich genügend genau erfüllt zu sein. Die kleinen Abweichungen der Daten von der theoretischen Kurve deuten allerdings auf plötzliche unstetige Dichtesprünge der Luftdichte in der Stratosphäre hin. Eine andere Möglichkeit ist natürlich die Abhängigkeit des Parameters k von der *Machzahl* und der *Reynoldszahl*, die sich in diesen Höhen auch sprunghaft ändern kann.

Die stärkste Luftabbremmung geschah nach dem Modell in einer Höhe von etwa **22121[m]** ($t = 67$ [s]) und betrug **1.64g**. Man spürt hier somit das **1.6** - fache seines Eigengewichtes. Kurz vor diesem kritischen Punkt setzte dann die „**flat spin**“ Instabilität ein, die wohl durch den *transsonischen Punkt* ausgelöst wurde und etwa 13[s] dauerte und bei $t = 77$ [s] durch Handbewegungen von F. BAUMGARTNER wieder abgedämpft werden konnte (siehe (4.32)). Am 24. Oktober 2014 machte ALAN EUSTACEER im Alter von 57 Jahren mit einem Fallschirm einen Stratosphärensprung aus 41.419 Metern Höhe und stellte so den Höhenrekord von F. BAUMGARTNER ein.

Abschließend noch die Fallzeiten für einen Körper (Menschen) mit der Grenzgeschwindigkeit $v_\infty = 50$ m/s und $H_S = 8000$ m. Aus 10000 m Höhe erhält man so eine Fallzeit von etwa 153 s, aus 20000 m Höhe 234 s, aus 30000 m Höhe 279 s und schließlich aus 40000 m Höhe ungefähr 306 Sekunden.

4.14 Die Superkanone

Während der Entwicklung der Artillerie im 19ten Jahrhundert entstand auch der Trend, immer größere und leistungsstärkere Kanonen zu konstruieren. Dies spiegelt sich auch im Roman *Autour de la lune* von JULES VERNE aus dem Jahre 1870 wider. In dieser visionären Geschichte werden drei Menschen und zwei Hunde mit einer *Kanone (Kolumbiade)* um den Mond herum wieder zur Erde zurück geschossen. Im amerikanischen Bürgerkrieg 1865 war zuvor die *Rodmankanone* zum Einsatz gekommen.

Schon 1855 hatten die amerikanischen Ingenieure A. S. LYMAN und J. R. HASKELL sogenannte Mehrkammergeschütze entwickelt, um sehr hohe Abschussgeschwindigkeiten zu erreichen. Der französische Erfinder L. G. PERREAUX stellte auf der Weltausstellung 1878 ein funktionsfähiges Mehrkammergeschütz vor. Als Mitte des Ersten Weltkrieges unter dem Ingenieur F. RAUSENBERGER von der Firma Krupp drei sogenannte Paris - Geschütze mit überlangem Rohr (38 m) gebaut wurden, um Reichweiten von über 100 km zu erlangen¹⁶, stellte man – entgegen den Ergebnissen von TARTAGLIA und EULER – fest, dass der maximale Schusswinkel bei über 50 Grad lag. Bei Abgangsgeschwindigkeiten von über 1000m/s war wohl die klassische ballistische Theorie nicht mehr ausreichend. Der Hauptgrund war schnell gefunden: Man hatte die Abnahme der Luftdichte mit der Höhe gänzlich unterschätzt. Auch musste jetzt die Rotation der Erde berücksichtigt werden.

Um dieses Ergebnis zu verstehen, müssen wir in der Schlüsselgleichung (4.46) die Höhenabhängigkeit des ballistischen Koeffizienten berücksichtigen. Bei Annahme einer einfachen barometrischen Höhenformel mit der Skala H_S für den Dichteverlauf erhalten wir die erweiterte Modellgleichung

$$y''' = 2k e^{-\frac{y}{H_S}} \sqrt{1 + y'^2} y'', \quad (4.241)$$

die wieder mit den Anfangsbedingungen

$$y[0] = 0; \quad y'[0] = \tan[\Theta]; \quad y''[0] = -\frac{g}{v_0^2} \sec[\Theta]^2 \quad (4.242)$$

gelöst werden muss. Wir skalieren aber zunächst die Gleichung in der Form

$$x = \frac{v_0^2}{g} \xi; \quad y = \frac{v_0^2}{g} \eta \quad (4.243)$$

Mit dieser Skalierung lautet die Differentialgleichung der ballistischen Kurve

$$\eta''' = 2\nu e^{-\beta \eta} \sqrt{1 + \eta'^2} \eta'', \quad (4.244)$$

mit den vereinfachten Anfangsbedingungen

$$\eta[0] = 0; \quad \eta'[0] = \tan[\Theta]; \quad \eta''[0] = -\sec[\Theta]^2. \quad (4.245)$$

¹⁶Am 29. März 1918 (Karfreitag) wurde durch Zufall in Paris eine Kirche während eines Gottesdienstes getroffen, was eindeutig ein Kriegsverbrechen darstellte

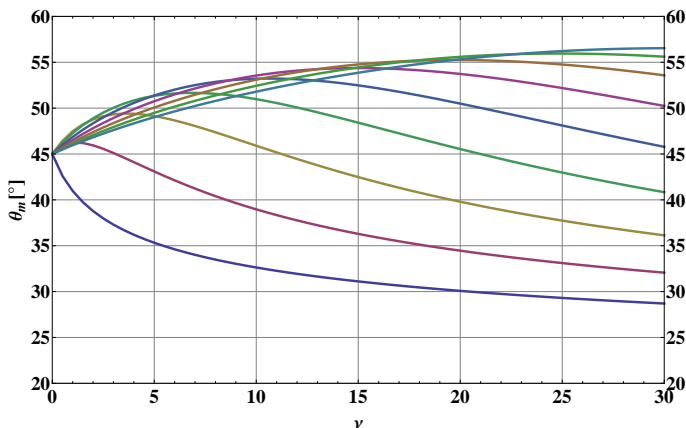


Fig. 4.33: Der extreme Elevationswinkel für maximale Wurfweite als Funktion der Parameter $\nu = k v_0^2/g$ und $\beta = v_0^2/(g H_S)$. Die untere Kurve entspricht $\beta = 0$ (konstante Luftdichte mit der Höhe). Die weiteren Kurven entsprechen dann $\beta = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$. Deutlich ist zu sehen, daß der Winkel für maximale Schussweite in bestimmten Sonderfällen über 45 Grad liegen kann.

Die beiden entscheidenden Parameter des Problems sind jetzt

$$\nu = \frac{k v_0^2}{g}; \quad \beta = \frac{v_0^2}{g H_S}. \quad (4.246)$$

Während ν wieder den am Boden gültigen ballistischen Parameter darstellt, bestimmt der neue dimensionslose Parameter β den Einfluss der mit der Höhe η stark abnehmenden Luftdichte. In der Abbildung (4.33) sind für den Parameter β von $\beta = 0$ bis $\beta = 40$ in Schritten von 5 die verwickelten Zusammenhänge für den extremalen Abschusswinkel Θ_m als Funktion von ν dargestellt. Die Werte können nur durch eine numerische Integration der obigen Differentialgleichung gewonnen werden. Der funktionelle Zusammenhang für $\beta = 0$ gleicht natürlich der schon früher berechneten Funktion in Figur (4.24).

Seit 1936 hatte die Firma Krupp das schwere Eisenbahngeschütz *Dora* oder *Schwerer (langer) Gustav* in drei Prototypen entwickelt. Die Rohrlänge betrug bis zu 48 m. Im Jahre 1940 fielen der deutschen Besatzung französische Pläne für eine Superkanone in die Hand, die nach dem Ersten

Weltkrieg unter dem Eindruck des Paris-Geschütz entstanden sind. So kam es 1943 zur Entwicklung von mindestens drei Typen der *Kanone V3*, als Tarnname *Hochdruckpumpe (HDP)* genannt. Man konstruierte bis zu 150 m lange Rohre an einem etwa 50 Grad geneigten Hang in *Wollin* bei *Misdroy* im heutigen Polen in der Nähe von Stettin und schließlich die größte Anlage bei Calais an der Atlantikküste. Die Mehrkammerkanonen sollten mit $v_0 = 1500$ m/s eine Reichweite von etwa **165** km haben, was aber nie erreicht wurde. Bei einer Skalenhöhe von $H_S = 8$ km entspricht dies einem ballistischen Koeffizienten von $k \sim 2 * 10^{-5} m^{-1}$. Heutzutage sind diese technischen Entwicklungen kaum noch bekannt und haben auch nur noch historischen Wert.

4.15 Vorhalt beim Bombenabwurf

Zu Beginn des ersten Weltkrieges 1914-1918 entstand durch die Entwicklung von Kampfflugzeugen das Problem, mit einer Bombe aus einer gewissen Flughöhe genau ein Ziel am Boden zu treffen¹⁷. So schreibt im noch zaristischen Russland der spätere berühmte Mathematiker, Meteorologe und Kosmologe A.A. FRIEDMANN (1888-1925) am 15. Februar 1915 in einem Brief von der Front:¹⁸

Lieber und hochverehrter Wladimir Andrejewitsch Steklow, heute habe ich Ihre Postkarte erhalten und möchte Ihnen und Olga Nikolajewna meinen herzlichen Dank dafür aussprechen, dass Sie an mich gedacht haben und für das Geschenk, das ich noch nicht erhalten habe, aber wahrscheinlich bald bekommen werde. Mein Leben verläuft ziemlich ausgeglichen, abgesehen von solchen Unfällen wie einer Granatsplitterexplosion in sechs Metern Entfernung, der Explosion einer österreichischen Bombe in unmittelbarer Nähe, die fast glücklich ausging, und dem Herunterfallen auf mein Gesicht und meinen Kopf, was zu einer aufgerissenen Oberlippe und Kopfschmerzen führte. Aber man gewöhnt sich natürlich an all das, insbesondere an die Dinge um sich herum, die tausendmal schrecklicher sind.

¹⁷es können aber auch Hilfsgüter sein, die einen bestimmten Bereich am Boden erreichen müssen

¹⁸Alexander A. Friedmann: The man who made the universe expand. Cambridge University Press 1993; paperback 2006; russische Erstausgabe 1988

Kürzlich wurde ein gutes österreichisches Flugzeug beschlagnahmt; ich habe viel mit dem gefangenen Piloten gesprochen; der Kerl war ziemlich schlau, so dass man aus dem Gespräch mit ihm den Eindruck gewinnen konnte, dass in Österreich alles in Ordnung sei, es genügend Truppen und Munition gäbe und der Krieg seiner Ansicht nach mit ihrem Sieg enden werde. Das ist natürlich Unsinn, aber dass sich der Krieg in die Länge ziehen könnte, ist ziemlich wahrscheinlich. Ich persönlich denke nach Abschluss der aerologischen Mission daran, das Fliegen zu erlernen; dies ist nicht mehr sehr gefährlich und kann erfolgreich in der Meteorologie und insbesondere bei synoptischen Beobachtungen eingesetzt werden.

Ich habe mich in letzter Zeit intensiv mit der Theorie des Bombenabwurfs beschäftigt, einer der Aufgaben des Großfürsten¹⁹. Die Frage reduziert sich auf die folgenden Gleichungen:

$$\frac{du}{dt} = -a u \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \frac{dv}{dt} = -g - a v \sqrt{u^2 + v^2};$$

bei $t = 0$, $u = c$ (etwa 20 m/s bis 40 m/s) und $v = 0$; w und v sind die Komponenten der Bombengeschwindigkeit entlang der Koordinatenachsen, g ist die Erdbeschleunigung und a ist ein Parameter, der die Form und das Gewicht der Bombe charakterisiert. Die verwendeten Bomben lassen sich in zwei Klassen einteilen: Die Bomben der ersten Klasse haben ein sehr kleines a , die anderen einen Wert nahe 1.

Die von FRIEDMANN verwendeten Gleichungen entsprechen den klassischen ballistischen Gleichungen im *subsonischen* Bereich. Die Bezeichnungen sind von den unseren etwas abweichend. So ist sein Parameter a wohl mit dem in diesem Buch verwendeten dimensionslosen Parameter $k v_0^2/g$ identisch. $a = 1$ bedeutet dann, dass die asymptotische Fallgeschwindigkeit $\sqrt{g/k}$ der Bombe identisch der Fluggeschwindigkeit des Flugzeugs entspricht. FRIEDMANN versuchte nun die Gleichungen bei kleinem a durch eine Reihenentwicklung, bei großem a durch die Approximation $\sqrt{u^2 + v^2} \sim v$ zu lösen. Obwohl dieses Vorgehen durch die Praxis

¹⁹A. M. ROMANOW (1866-1933), Onkel von Nikolaus II., russischer Großfürst und Admiral, organisierte im Ersten Weltkrieg die Armeefliegerkräfte, floh 1918 von der Krim nach Frankreich

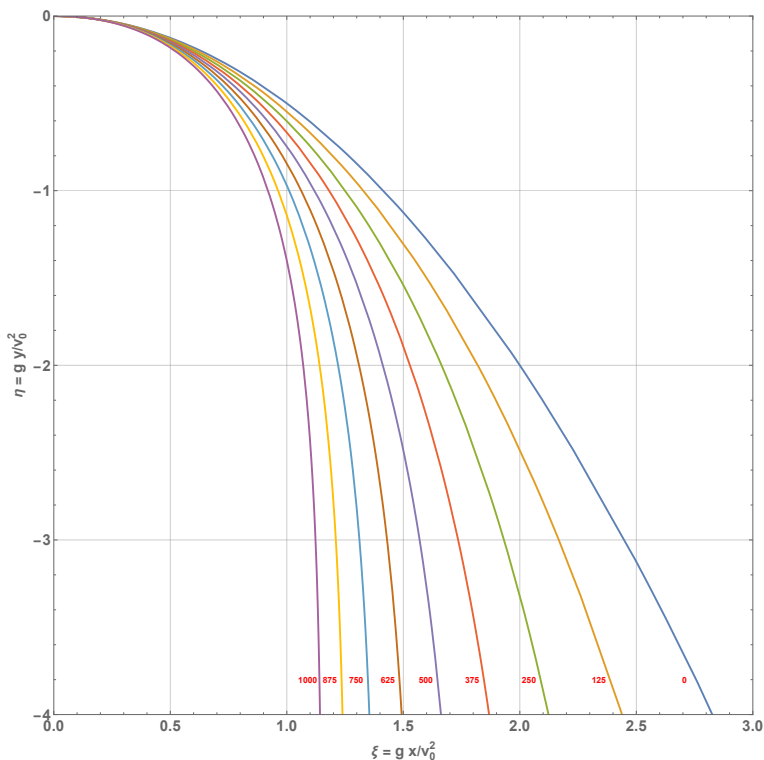


Fig. 4.34: Die möglichen Flugbahnen einer fallenden Bombe für den Parameter $\alpha = k v_0^2/g$ von 0 bis 1 in Schritten von 0.125. Die roten Zahlen bedeuten 1000α .

(numerische Integration und Erfahrung) einigermaßen bestätigt wurde, war FRIEDMANN mit dem Ergebnis in analytischer Hinsicht unzufrieden; fand aber in der damaligen Literatur keine bessere Antwort.

Mathematisch ist die Bahnform einer un gelenkten “Bombe” mit Abschusswinkel $\Theta = 0$ von einem horizontal fliegenden Flugzeug analytisch nicht ganz einfach zu berechnen. Natürlich ist immer eine numerische

Quadratur in der Form

$$x = \frac{v_0^2}{g} \int_0^m \frac{dp}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \left(p \sqrt{1 + p^2} + \ln[p + \sqrt{1 + p^2}] \right)} \quad (4.247)$$

$$y = \frac{v_0^2}{g} \int_0^m \frac{p dp}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \left(p \sqrt{1 + p^2} + \ln[p + \sqrt{1 + p^2}] \right)} \quad (4.248)$$

möglich, wobei die y -Koordinate die Fallstrecke zum Boden bezeichnet. Der Parameter m ist hier das momentane Gefälle der Bahnkurve. FRIEDMANN hat diese Kurven zumindest für kleine α genau berechnet. Historisch äußerst kurios ist es, dass der österreichischer Meteorologe, Geophysiker und Bergsteiger H. VON FICKER (1881-1957) sich im Kriegsjahr 1915 im damaligen Galizien in der Stadt *Przemysl* an der heutigen polnisch - ukrainischen Grenze in der berühmten Festung aufhielt, die wohl zur gleichen Zeit FRIEDMANN als zaristischer russischer Kampfpilot bombadiert hatte. Im Jahre 1923 trafen sich beide in Berlin wieder, wo H. VON FICKER eine Professur bekommen hatte und FRIEDMANN vergeblich versuchte, A. EINSTEIN zu treffen.

4.16 Über die Flugbahn von Golfbällen

Die Wurfparabel ist eine gute Näherung bei kleinen Geschwindigkeiten und schweren Kugeln. Bei höheren Geschwindigkeiten oder größeren Bällen müssen wir aber die Luftreibung berücksichtigen. Wie wir in der Einleitung gesehen haben, war die Aufstellung des genauen Reibungsgesetzes ein langer historischer Prozess. Die Bewegung eines rotierenden Fußballes, Tennisballs oder Golfballes stellt ein besonderes Problem dar. Im Folgenden wollen wir zunächst die Flugbahn eines Fußballes betrachtet werden, dessen Luftwiderstand und Auftriebskraft bis zu Geschwindigkeiten von etwa **25m/s** in guter Näherung *linear mit der Geschwindigkeit* zunimmt. Aufgrund des *Bernoulli-Theorems* gilt für die Auftriebskraft als Druckdifferenz zwischen unterschiedlichen Seiten des rotierenden Balles auch bei höheren Geschwindigkeiten noch das lineare Widerstandsgesetz. Wir postulieren also unter Berücksichtigung des Magnuseffektes nach

(2.1) die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -f_D \dot{x} - f_L \dot{y} \\ \ddot{y} &= -f_D \dot{y} + f_L \dot{x} - g.\end{aligned}$$

Die als konstant angenommenen Parameter f_D (drag force) und f_L (lift force) stellen eine Art inverse Relaxationszeit dar. Zudem ist f_L hier direkt proportional der Winkelgeschwindigkeit ω des rotierenden Balles. Voraussetzung für die obigen Gleichungen ist, dass die Rotationsachse des Balles parallel zum Boden und senkrecht zur Schussrichtung liegt (also keine seitlich abweichend Bananenflanke). Der inverse Zeitparameter f_D ist immer positiv, während f_L je nach Rotationsrichtung des Balles positiv (**backspin**) oder negativ (**topspin**; slice) sein kann. Durch Einführung der komplexen Zahlen

$$\mathbf{z} = x + \imath y, \quad \mathbf{f} = f_D - \imath f_L \quad (4.249)$$

lassen sich die obigen Gleichungen in die einzige Gleichung

$$\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{f} \dot{\mathbf{z}} + \imath g = 0 \quad (4.250)$$

vereinigen. Ihre Lösung mit der Anfangsbedingung $\mathbf{z}[0] = 0$ und $\mathbf{z}'[0] = e^{\imath\Theta}$ lautet ($\imath^2 = -1$)

$$\mathbf{z} = \frac{v_0}{\mathbf{f}} e^{\imath\Theta} (1 - e^{-\mathbf{f}t}) - \frac{\imath g}{\mathbf{f}^2} (e^{-\mathbf{f}t} + \mathbf{f}t - 1).$$

(4.251)

Die Formel besteht aus zwei Teilen: Der erste Teil proportional v_0 beschreibt eine spiralförmige Bewegung in den Fixpunkt (Pol) $v_0 e^{\imath\Theta}/\mathbf{f}$ hinein, der zweite Teil proportional g ist eine schlangenförmige Abwärtsbewegung mit der asymptotisch konstanten Geschwindigkeitsrichtung $-\imath g/\mathbf{f}$. Der erste Teil proportional v_0 entspricht einer Bewegung längst einer logarithmischen Spirale. Um dies einzusehen, betrachten wir die Bewegung relativ zum Pol. Es gilt bei $g = 0$ für diese Relativbewegung

$$\delta \mathbf{z} = -\frac{v_0}{\mathbf{f}} e^{\imath\Theta - \mathbf{f}t}.$$

Diese Relativbewegung stellt eine logarithmische Spirale mit dem Steigungswinkel $\tan[\varphi] = f_D/f_L$ dar. Mit der idealisierten Lösung (4.251)

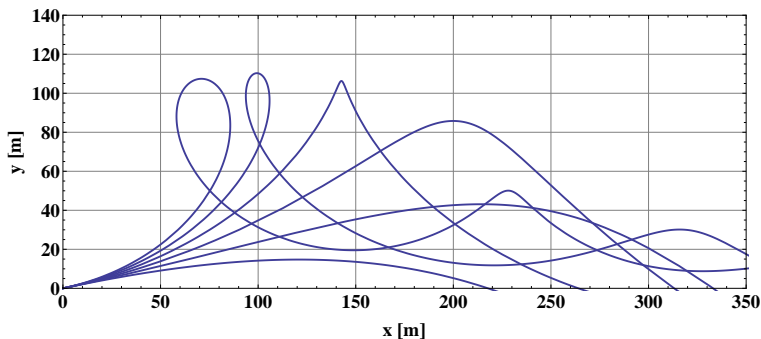


Fig. 4.35: Die möglichen Flugbahnen eines Balles mit linearem Widerstands- und Auftriebsgesetz, berechnet mit (4.251). Die Parameter sind hier $v_0 = 60\text{m/s}$, $\Theta = 12^\circ$, $\mathbf{f} = 0.1(1 - \imath j)$, wobei j von 1 bis 6 genommen wurde.

lassen sich so schon wichtige Eigenschaften von ballistischen Flugbahnen eines Balles mit einem **backspin** ($\Im[\mathbf{f}] < 0$) studieren und verstehen.

Für die Beschreibung der Flugbahn eines Fußballes reichen diese Gleichungen aus, nicht aber für die wesentlich schnelleren **Golfbälle** mit *backspin*. Hier müssen wir zumindest für den direkten Luftwiderstand ein quadratisches Widerstandsgesetz ansetzen. Historisch ist interessant, dass der Schottische Physiker und begeisterte Golfspieler P.G. TAIT (1831-1901) diesen Ansatz gemacht hat ([56],[57]). Für den Luftwiderstand setze er nach Rücksprache mit dem irischen Mathematiker und Physiker G.G.STOKES (1819-1903) ein mit der Geschwindigkeit quadratisches, für den Auftrieb durch den *backspin* wieder ein mit der Geschwindigkeit lineares Gesetz (Magnus Effekt) an. Wir wollen dieser Annahme hier folgen und setzen als fundamentale Bewegungsgleichung für den rotierenden Golfball mit *backspin*

$$\ddot{x} = -k v \dot{x} - f \dot{y}, \quad (4.252)$$

$$\ddot{y} = -k v \dot{y} + f \dot{x} - g \quad (4.253)$$

an, indem $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ ist, k und f eine reziproke Länge für den Luftwiderstand sowie eine der Rotationsfrequenz ω des Golfballes proportionale Frequenzkonstante darstellen. Die eigentlichen Details eines Golfballes soll hier nicht weiter erörtert werden. Zu erwähnen wäre nur, dass die heutigen Bälle an ihrer Oberfläche etwa 300-450 sehr kleine Einbuchtungen

(sogenannte **dimples**) aufweisen, welche den Luftwiderstand gegenüber einer glatten Kugel deutlich verringern. Dies wurde schon 1897 in einem Patent festgelegt.

Mit $\mathbf{z} = x + iy$ lassen sich nun die beiden gekoppelten Gleichungen wieder als

$$\ddot{\mathbf{z}} + (k|\dot{\mathbf{z}}| - \imath f)\dot{\mathbf{z}} + \imath g = 0 \quad (4.254)$$

schreiben. Eine geschlossene analytische Integration ist aber jetzt nicht mehr möglich. Man kann diese Gleichung aber als Grundlage für eine numerische Integration benutzen. Multipliziert man wieder die erste Gleichung mit \dot{x} , die zweite mit \dot{y} und addiert beide, so folgt die erste Grundgleichung

$$v\dot{v} + kv^3 + g\dot{y} = 0. \quad (4.255)$$

Berücksichtigen wir wieder die elementaren Beziehungen

$$\dot{x} = v \cos[\theta]; \quad \dot{y} = v \sin[\theta]; \quad dx = \cos[\theta] ds; \quad dy = \sin[\theta] ds, \quad (4.256)$$

so gilt analog wie in der klassischen Ballistik

$$\dot{v} + kv^2 + g \sin[\theta] = 0. \quad (4.257)$$

oder mit (4.256)

$$v \frac{dv}{ds} + kv^2 + g \sin[\theta] = 0. \quad (4.258)$$

Da die Auftriebskraft in unserem Modell immer senkrecht zur Flugrichtung wirkt, ist das Ergebnis für die Geschwindigkeitsveränderung verständlich.

Wird weiterhin die erste Gleichung von (4.252) mit \dot{y} , die zweite mit \dot{x} multipliziert und dann die zweite von der ersten subtrahiert, so gilt zunächst

$$\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x} = -fv^2 + g\dot{x} \quad (4.259)$$

und wegen (4.256) schließlich

$$v \frac{d\theta}{dt} = f v - g \cos[\theta]. \quad (4.260)$$

Die beiden Gleichungen (4.258) und (4.260) sind unsere Modellgleichungen für die ballistische Kurve eines Golfballes mit **backspin**. Beide Gleichungen lassen sich wiederum einfach interpretieren. Die Gleichung (4.258) beschreibt die Kräftebilanz in tangentialer Richtung der Bahnkurve, die Gleichung (4.260) normal zur Kurve. Mit der Bogenlänge s und (4.256) gilt somit die wichtige Relation

$$\boxed{v^2 \frac{d\theta}{ds} = f v - g \cos[\theta]}, \quad (4.261)$$

wobei $ds/d\theta$ bis auf das Vorzeichen den Krümmungsradius der Bahnkurve bezeichnet.

Wir wollen jetzt wieder eine einzige Differentialgleichung für $v[\theta]$ ableiten. Dazu schreiben wir (4.257) nach der Kettenregel

$$\frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + k v^2 + g \sin[\theta] = 0. \quad (4.262)$$

Eliminieren wir hier die Größe $d\theta/dt$ mit Hilfe von (4.260), so erhalten wir die fundamentale Gleichung

$$\boxed{\frac{1}{v} \frac{dv}{d\theta} = \frac{g \sin[\theta] + k v^2}{g \cos[\theta] - f v}}. \quad (4.263)$$

Diese Differentialgleichung beschreibt die Geschwindigkeit v eines rotierenden Golfballes mit *backspin* als Funktion des Steigungswinkel θ seiner Flugbahn.

Eine exakte Integration der Gleichung (4.263) scheint nicht möglich und auch nicht sinnvoll zu sein. Ähnlich wie P.G.TAIT im Jahre 1891 können wir zunächst den Spezialfall $g \equiv 0$ betrachten. In diesem Fall reduziert sich die Gleichung (4.263) auf

$$\frac{1}{v^2} \frac{dv}{d\theta} = -\frac{k}{f}.$$

Eine Integration liefert zunächst

$$\frac{1}{v} = \frac{k}{f} \theta + C.$$

Völlig unabhängig von der Integrationskonstanten C sieht man hier, dass für einen bestimmten Winkel θ die Geschwindigkeit v unendlich wird. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir hier $C = 0$ setzen und so den singulären Punkt nach $\theta = 0$ legen. Als Lösung erhalten wir so

$$v[\theta] = \frac{f/k}{\theta}. \quad (4.264)$$

Die Orientierung des Koordinatensystems wurde jetzt so festgelegt, dass für $\theta = 0$ die Geschwindigkeit unendlich ist. $f > 0$ (Auftrieb) gilt jetzt $\theta > 0$, für $f < 0$ (Abtrieb) gilt entsprechend $\theta < 0$. Setzen wir diese Lösung in (4.261) mit $g \equiv 0$ ein, so folgt die bemerkenswerte Relation

$$ds = \frac{1}{k} \frac{d\theta}{\theta}. \quad (4.265)$$

wobei nun die Größe f_L herausgefallen ist. Die eigentliche Differentialgleichung der spiralförmigen Bahn im Falle $g \equiv 0$ lautet mit (4.256) also

$$dx = \frac{1}{k} \frac{\cos[\theta]}{\theta} d\theta, \quad dy = \frac{1}{k} \frac{\sin[\theta]}{\theta} d\theta. \quad (4.266)$$

Dies war auch das Resultat von P.G. TAIT Ende des 19ten Jahrhunderts. Eine Quadratur ergibt zunächst die Darstellung

$$x[\theta] = \frac{1}{k} \int_{0+}^{\theta} \frac{\cos[\xi]}{\xi} d\xi, \quad y[\theta] = \frac{1}{k} \int_0^{\theta} \frac{\sin[\xi]}{\xi} d\xi. \quad (4.267)$$

Das Integral für x divergiert aber in Richtung der Asymptoten für $\xi \rightarrow 0$ und $x \rightarrow -\infty$. Wir verschieben das Koordinatensystem in der x-Richtung aus dem Unendlichen in den Pol, indem wir schreiben

$$x[\theta] = -\frac{1}{k} \int_{\theta}^{\infty} \frac{\cos[\xi]}{\xi} d\xi, \quad y[\theta] = \frac{1}{k} \int_0^{\theta} \frac{\sin[\xi]}{\xi} d\xi. \quad (4.268)$$

Mit dem Integralsinus und Integralcosinus erhalten wir so für die Spiralbahn endgültig

$$x[\theta] = \frac{1}{k} \mathbf{Ci}[\theta], \quad y[\theta] = \frac{1}{k} \mathbf{Si}[\theta]. \quad (4.269)$$

Die Spirale hat universellen Charakter, denn weder der Auftriebsparameter f noch die Anfangsgeschwindigkeit v_0 spielt für die Gestalt der Kurve eine Rolle.

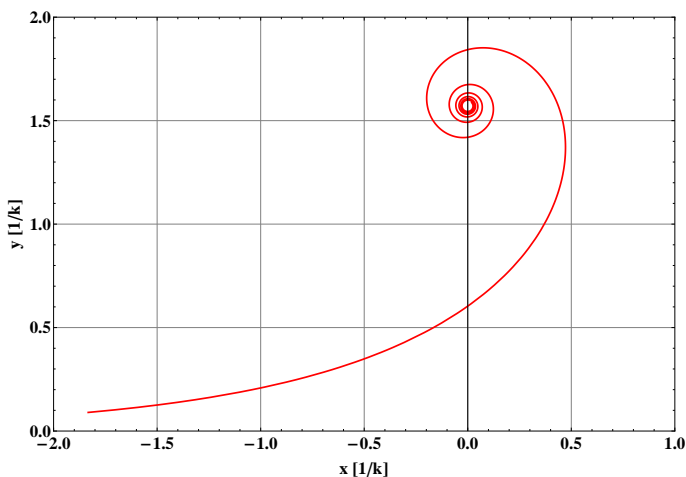


Fig. 4.37: Die Spiralbahn eines rotierenden Golfballes im Falle $g = 0$, in der Literatur auch Nielsen's Spirale (*sici spiral*) genannt.

zu berechnen, um die Parameter der erste Näherung aus der Störungsrechnung zu verbessern. Mit der Abkürzung

$$\mathbf{G}[\xi] = e^{\xi} - \xi - 1 \quad (4.272)$$

erhält man so für die Bahn eines Golfballes mit *back spin* die Näherung

$$y \approx \tan[\Theta] x + \frac{f \sec[\Theta]}{k^2 v_0} \mathbf{G}[k \sec[\Theta] x] - \frac{g}{4 k^2 v_0^2} \mathbf{G}[2 k \sec[\Theta] x]. \quad (4.273)$$

Die Näherung von P.G. TAIT sieht genauso aus, nur ist bei Ihm $\sec[\Theta] \sim 1$ und $\tan[\Theta] \sim \Theta$. Der Abgangswinkel Θ wird im Golf als **Loft** bezeichnet. Ein Vergleich mit numerischen Integrationen zeigt, dass bis knapp über die **blow up** Grenze, bei der beim Abschlag Auftrieb und Gravitation ausgeglichen sind, die analytische Darstellung der Bahnkurve eine gute Approximation darstellt.

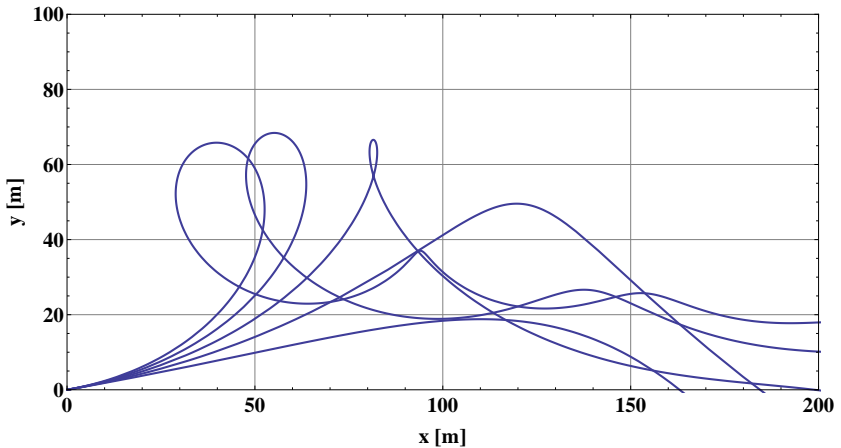


Fig. 4.38: Die Flugbahnen eines Golfballes , berechnet mit einer numerischen Integration von (4.252,4.253). Die Parameter sind hier $v_0 = 80\text{m/s}$, $\Theta = 10^\circ$, $\mathbf{k} = 0.01\text{ m}^{-1}$, $f = 0.2 * j$, wobei j von 1 bis 5 genommen wurde.

4.17 Einfluss der Erdrotation

Der britische Mathematiker J.E. LITTLEWOOD (1885-1977) berichtet in seinem Buch *A Mathematician's Miscellany* aus dem Jahre 1953 von einer Begebenheit während des Seegefechtes am 8. Dezember 1914 vor den Falklandinseln zwischen mehreren britischen Schlachtschiffen und zwei deutschen Panzerkreuzern der Ostasienflotte , die ihm ein britischer Offizier als unmittelbar Beteiligter mitteilte. Die britischen Schiffe begannen auf große Distanzen zu feuern, verfehlten aber ständig ein deutsches Schiff zunächst immer um etwa 100 Yards²⁰ linksseitig. Man hatte zwar beim Zielen auf große Entfernungen stillschweigend auch die Drift durch die Erdrotation durch einen Linksvorhalt berücksichtigt, aber vergessen, dass man sich auf der Südhalbkugel bei etwa $\varphi \sim -52^\circ$ befindet, wo keine Rechtsablenkung, sondern eine Linksablenkung auftritt. Aufgrund des falschen Linksvorhalts verdoppelte sich so der Fehler.

Das so geschilderte Geschehen wirft die Frage nach dem Einfluss der Erdrotation auf die Bahn einer Kanonenkugel auf. Nach Figur (4.39) betrachten wir auf der Erdoberfläche ein Koordinatensystem, bei dem die

²⁰1 yd = 0.9144 m

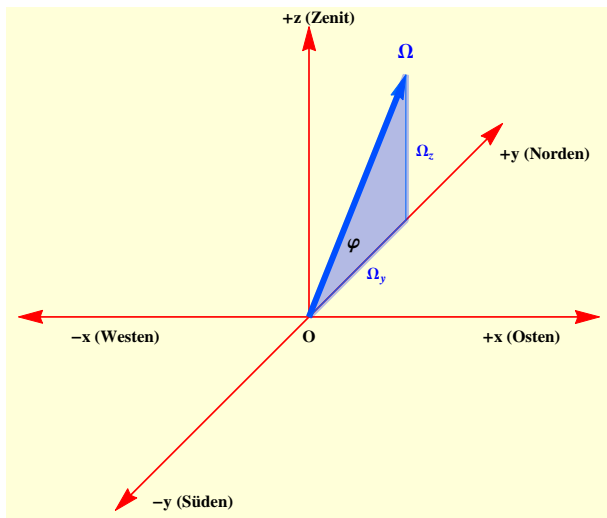


Fig. 4.39: Das lokale Koordinatensystem auf der Nordhalbkugel der rotierenden Erde mit dem axialen Winkelgeschwindigkeitsvektor Ω . Der Vektor zeigt auf den Nordpol (Polarstern) des Himmels. Der Neigungswinkel φ entspricht der geographischen Breite des Ortes. Auf der Nordhalbkugel ($\varphi > 0$) wird eine Wurfparabel nach rechts, auf der Südhalbkugel ($\varphi < 0$) nach links abgelenkt.

+x Achse nach Osten, die +y Achse nach Norden und die +z Achse in den Zenit zeigt. Dann gelten die schon von C.F. GAUSS 1802 aufgestellten Bewegungsgleichungen (hier ohne Luftwiderstand)

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\Omega \sin[\varphi] \dot{y} + 2\Omega \cos[\varphi] \dot{z} &= 0, \\ \ddot{y} + 2\Omega \sin[\varphi] \dot{x} &= 0, \\ \ddot{z} - 2\Omega \cos[\varphi] \dot{x} &= -g.\end{aligned}\tag{4.274}$$

Die Größe $\Omega = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ bedeutet die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und φ die geographische Breite. Um die Gleichungen in zweckmäßiger Approximation zu lösen, führen wir für den Erdboden die komplexe Koordinate

$$\zeta = x + \imath y$$

ein. Die obigen Gleichungen reduzieren sich dann auf das System

$$\begin{aligned}\ddot{\zeta} + 2\imath\Omega \sin[\varphi] \dot{\zeta} + 2\Omega \cos[\varphi] \dot{z} &= 0, \\ \ddot{z} - 2\Omega \cos[\varphi] \dot{x} + g &= 0.\end{aligned}$$

Dieses gekoppelte System kann man einfach durch eine Reihenentwicklung bis zur dritten Ordnung in der Zeit t mit den Anfangswerten $x[0] = y[0] = z[0] = 0$ sowie

$$\dot{\zeta}[0] = v_0 \cos[\Theta] e^{\imath\alpha}; \quad \dot{z}[0] = v_0 \sin[\Theta].$$

lösen, wobei α der Azimuthwinkel ist, der von Osten über Norden gezählt wird. Man erhält

$$\begin{aligned}\zeta[t] &= e^{\imath\alpha} v_0 \cos[\Theta] t - \\ &\quad \imath e^{\imath\alpha} v_0 \Omega \cos[\Theta] \sin[\varphi] t^2 - \\ &\quad v_0 \Omega \sin[\Theta] \cos[\varphi] t^2 + \\ &\quad \frac{1}{3} \Omega g \cos[\varphi] t^3 + \dots\end{aligned}$$

Der *erste Term* beschreibt die Spur der ungestörten Wurfparabel längs des Erdbodens in der Richtung α , der *zweite Term* eine dazu orthogonale Abweichung, die auf der Nordhalbkugel nach rechts, auf der Südhalbkugel aber nach links gerichtet ist. Der *dritte Term* beschreibt eine reine Westablenkung, während der *vierte Term* eine Ostablenkung anzeigt, wie sie auch bei einem freien Fall in einen tiefen Schacht auftritt. Auch die Flugzeit wird leicht modifiziert, wie man an der Lösung für die vertikale z Koordinate

$$z[t] = v_0 \sin[\Theta] t + \left(v_0 \Omega \cos[\alpha] \cos[\Theta] \cos[\varphi] - \frac{1}{2} g \right) t^2 + \dots$$

sehen kann. Für die geänderte Flugzeit ergibt sich so

$$T = 2 \frac{v_0}{g} \sin[\Theta] + 2 \frac{v_0^2}{g^2} \Omega \cos[\alpha] \sin[2\Theta] \cos[\varphi] + \dots$$

Mit der Wurfweite W nach der Flugzeit T und der Gipfelhöhe H der

Bahn lässt sich das obige Ergebnis vereinfachen zu

$$\begin{aligned}\zeta[T] = & e^{\iota\alpha} \left(1 + \sqrt{2} \Omega \cos[\varphi] \sqrt{\frac{W}{g} \cot[\Theta] \cos[\alpha]} \right) W - \\ & 2 \iota e^{\iota\alpha} \Omega \sqrt{\frac{2H}{g}} \sin[\varphi] W - \\ & \frac{8}{3} \Omega H \sqrt{\frac{2H}{g}} \cos[\varphi].\end{aligned}$$

Während der letzte Term eine feste Westablenkung anzeigt, beschreibt der erste Term eine Erhöhung oder Erniedrigung der Schussweite und der zweite Term die rechts - links Abweichung vom Azimut, je nach Erdhalbkugel. Mit den Werten $W = \mathbf{10000}$ m, $H = \mathbf{5000}$ m, $g = \mathbf{9.81m/s^2}$, $\Theta = \mathbf{45^\circ}$ und $\varphi = \pm\mathbf{52^\circ}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{8}{3} \Omega H \sqrt{\frac{2H}{g}} \cos[\varphi] & \sim \mathbf{19\,m} \\ \sqrt{2} \Omega W \cos[\varphi] \sqrt{\frac{W}{g} \cot[\Theta] \cos[\alpha]} & \sim \mathbf{20 \cos[\alpha]\,m} \\ 2 \Omega W \sqrt{\frac{2H}{g}} \sin[\varphi] & \sim \mathbf{37\,m}.\end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis wird die Schilderung von LITTLEWOOD verständlich, warum beim Verwechseln der geographischen Breite und daraus resultierenden falschem Vorhalt ein Fehler von etwa 90 Meter auftreten kann.

5 Hypersonische Ballistik

5.1 Die erweiterten Grundgleichungen

Tritt ein Meteor oder *Bolide* in die Erdatmosphäre ein, hat er mindestens die lokale Entweichgeschwindigkeit an der Erdoberfläche, gegeben durch $\sqrt{2gR}$, wo R den Erdradius und g die Erdbeschleunigung bezeichnen. Auch in der Phase der bemannten Mondlandungen von 1968 - 1972 hatten zum erstenmal in der Geschichte der Astronautik die zurückkehrenden Apollo - Kapseln Geschwindigkeiten in dieser Größenordnung. In der Zeitepoche von L. EULER und J.H. LAMBERT wären diese Probleme reine Fiktion gewesen - ganz wie der Ritt von Münchhausen auf der Kanonenkugel. Ein besonderes ballistisches Problem stellt somit die Abbremsung dieser Flugkörper dar, die sich in einer Parabelbahn einem Planeten (Erde) nähern und schließlich in die oberen Atmosphärenschichten eindringen. Die ursprünglichen Bewegungsgleichungen (4.1) und (4.2)

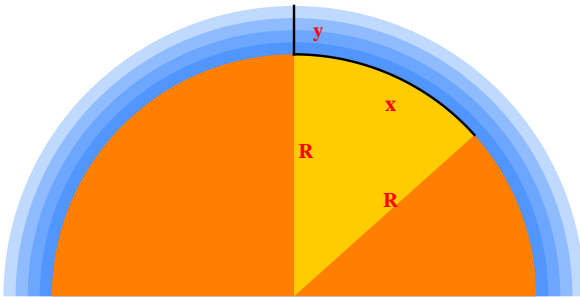


Fig. 5.1: Um auch Flugbahnen bei höheren Geschwindigkeiten zu beschreiben, muss man als nächstes die Erdkrümmung und die Zentrifugalbeschleunigung berücksichtigen. Die $x - y$ - Koordinaten werden hier zu „lokalen Polarkoordinaten“. Die Größe \dot{x} übernimmt dabei die Rolle einer Winkelgeschwindigkeit; multipliziert mit dem Erdradius R ist diese eine Geschwindigkeit über Grund. (Planetenboden $y = 0$) .

müssen jetzt für den Fall abnehmender Luftdichte und aufgrund sehr hoher Geschwindigkeiten in einem zentralsymmetrischen Gravitationsfeld erweitert werden. Die Position des Flugkörpers beschreiben wir durch die globalen Koordinaten X, Y . Die Bewegungsgleichungen in den zwei Vektorkomponenten lauten dann

$$\ddot{\vec{X}} = -G M \frac{\vec{X}}{r^3} - k \exp[(R-r)/H_s] v \dot{\vec{X}}, \quad (5.1)$$

$$\ddot{\vec{Y}} = -G M \frac{\vec{Y}}{r^3} - k \exp[(R-r)/H_s] v \dot{\vec{Y}}. \quad (5.2)$$

Dabei gilt

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad v = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}. \quad (5.3)$$

Durch zeitlich Differentiation folgt weiterhin

$$r \dot{r} = X \dot{X} + Y \dot{Y}; \quad v \dot{v} = \dot{X} \ddot{X} + \dot{Y} \ddot{Y}. \quad (5.4)$$

Wir führen Polarkoordinaten

$$X = r \cos[\varphi]; \quad Y = r \sin[\varphi]; \quad v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} \quad (5.5)$$

ein. Einsetzen in die obigen Gleichungen führt für zu dem System

$$\ddot{r} = -\frac{G M}{r^2} - k \exp[(R-r)/H_s] v \dot{r}, \quad (5.6)$$

$$r \ddot{\varphi} = -2 \dot{r} \dot{\varphi} - k \exp[(R-r)/H_s] v r \dot{\varphi}. \quad (5.7)$$

Daraus leiten wir mit (5.4) und dem System (5.6,5.7) für die Geschwindigkeitsänderungen die Gleichung

$$v \dot{v} = -G M \frac{\dot{r}}{r^2} - k \exp[(R-r)/H_s] v^3 \quad (5.8)$$

ab. Andererseits gilt für den Neigungswinkel θ zur lokalen Horizontalen

$$\sin[\theta] = \frac{\dot{r}}{v}. \quad (5.9)$$

Wird dieser Ausdruck nach der Zeit differenziert, so erhält man (5.6,5.7)

$$v^2 \dot{\theta} = -\left(\frac{G M}{r^2} - \frac{v^2}{r}\right) r \dot{\varphi}. \quad (5.10)$$

Führen wir jetzt die *lokale* Koordinaten in der Nähe des Erdbodens

$$r = R + y; \quad \dot{y} = \dot{r}; \quad \dot{x} = r \dot{\varphi} \quad (5.11)$$

ein, wo R den Erdradius bezeichnet, so lauten die gekoppelten Bewegungsgleichungen

$$v \dot{v} = -k \exp[-y/H_S] v^3 - G M \frac{\dot{y}}{(R+y)^2}. \quad (5.12)$$

und

$$v^2 \dot{\theta} = - \left(\frac{G M}{(R+y)^2} - \frac{v^2}{R+y} \right) \dot{x}. \quad (5.13)$$

Dies sind die globalen Verallgemeinerungen der lokalen Gleichungen (4.4) und (4.9). Die Erweiterung besteht einerseits in der Berücksichtigung der Abnahme von Luftdichte und Gravitation mit der Höhe und andererseits einem Zentrifugalterm. Hier ist bemerkenswert, dass dort v^2 anstatt \dot{x}^2 steht. In den meisten Fällen wird die Höhenabhängigkeit der Gravitation im Erdnahen Bereich vernachlässigt. Also gilt mit

$$g = \frac{G M}{R^2}; \quad \dot{x} = v \cos[\theta]; \quad \dot{y} = v \sin[\theta]$$

$$\dot{v} = -k \exp[-y/H_s] v^2 - g \sin[\theta].$$

(5.14)

und

$$v \dot{\theta} = - \left(g - \frac{v^2}{R} \right) \cos[\theta].$$

(5.15)

Wegen (5.11) können wir alternativ die Bewegungsgleichungen (5.6) und (5.7) auch

$$\ddot{x} = -k e^{-\frac{y}{H_s}} v \dot{x} - \frac{\dot{x} \dot{y}}{R}, \quad (5.16)$$

$$\ddot{y} = -k e^{-\frac{y}{H_s}} v \dot{y} + \frac{\dot{x}^2}{R} - g. \quad (5.17)$$

schreiben. Bemerkenswert ist hier, dass der Term $\dot{x}\dot{y}/R$ ohne den Faktor 2 auftritt. Man kann aber auch zusätzlich zum Luftwiderstand eine Auftriebskraft bei einem supersonischen Gleitkörper berücksichtigen. Die Modellgleichungen lauten dann

$$\ddot{x} = -k_D e^{-\frac{y}{H_s}} v \dot{x} - k_L e^{-\frac{y}{H_s}} v \dot{y} - \frac{\dot{x}\dot{y}}{R}, \quad (5.18)$$

$$\ddot{y} = -k_D e^{-\frac{y}{H_s}} v \dot{y} + k_L e^{-\frac{y}{H_s}} v \dot{x} + \frac{\dot{x}^2}{R} - g. \quad (5.19)$$

Hier sind k_D (*drag force*) und k_L (*lift force*) als konstant angenommene charakteristische inverse Längen für die aerodynamischen Kräfte. $k_L > 0$ bedeutet Auftrieb, $k_L < 0$ bedeutet Abtrieb des Gleitkörpers. Bei Gleitkörpern kann das Verhältnis k_L/k_D durchaus Werte um 1 oder darüber erreichen.

Wenn diese Gleichungen für eine globale Analyse nicht ausreichen, müssen wir wieder zu den allgemeinen Bewegungsgleichungen (5.1) und (5.2) zurückkehren. Wir führen die dimensionslose Zeit

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{R}} t, \quad g = \frac{GM}{R^2} \quad (5.20)$$

ein und setzen für die Position und die aerodynamischen Koeffizienten die dimensionslosen komplexen Zahlen

$$\mathbf{p} = (X + \imath Y)/R, \quad \kappa = (k_D - \imath k_L) R, \quad \gamma = \frac{R}{H_s} \quad (5.21)$$

an, so lautet die Bewegungsgleichung in der dimensionslosen komplexen Koordinate \mathbf{p} (Striche bedeuten Ableitungen nach τ)

$$\mathbf{p}'' + \kappa \exp[\gamma(1 - |\mathbf{p}|)] |\mathbf{p}'| \mathbf{p}' + \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^3} = 0$$

(5.22)

Die einzigen Parameter, welche die Struktur des Gleitfluges eines hypersonischen Körpers bestimmen, sind demnach die komplexe Zahl κ und die reelle Größe γ . Durch numerische Integrationen lassen sich mit dieser einfachen Gleichung sehr schnell antriebslose Gleitbahnen bei unterschiedlichen Parameterwerten untersuchen. In Fig. (5.2) ist eine solche *semiballistische* Rikoschett-Flugbahn (von franz. *ricocher*, „abprallen“) in der oberen Stratosphäre dargestellt.

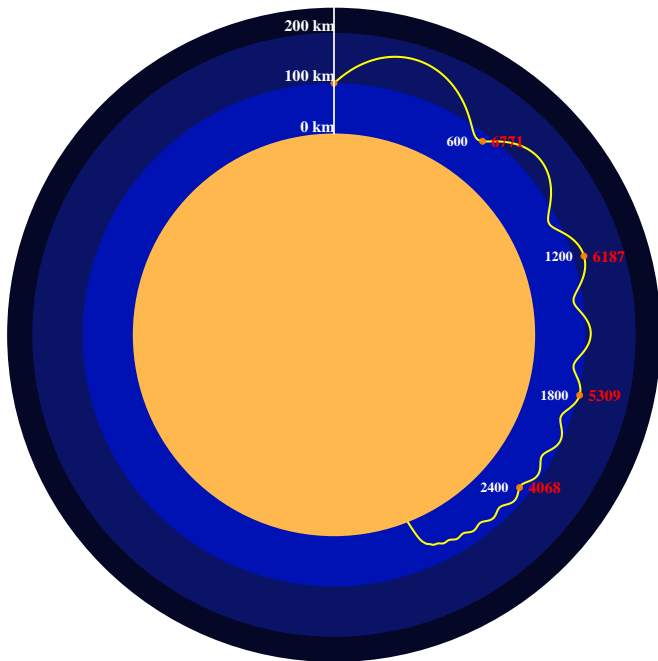


Fig. 5.2: Die rikoschettierende Gleitbahn eines hypersonischen Flugkörpers in der oberen Atmosphäre. Der hier komplexwertige aerodynamische Koeffizient κ ist $0.2 - 0.4i$, der Parameter $\gamma \sim 800$. Erste Berechnungen solcher Flugbahnen hat der österreichische Raumfahrtingenieur E. SÄNGER (1905-1964) mit seiner Assistentin I. BREDT-SÄNGER (1911-1983) im Rahmen des geheimen Projektes „Silbervogel“ von 1938-1944 durchgeführt. In den USA durch die Space Shuttles, in der UDSSR durch die analogen Raumgleiter „Buran“ realisiert, wobei ein kleinerer Prototyp auch als das „Vögelchen“ bezeichnet wurde.

5.2 Das Allen - Eggers Modell

Zu Beginn der 1950er Jahre entstand in der Raketenballistik das Problem, wie Flugkörper aus dem All unbeschadet wieder zur Erde zurückkehren können, ohne dass sie durch die *Reibungshitze* beim Wiedereintritt in die Erdatmosphäre zerstört werden, wie es fast jedem Riesenboliden (Meteoriten) beim Eindringen in die Atmosphäre passiert (Teil des geheimen



Fig. 5.3: *Künstlerische Darstellung von Apollo 8 beim Wiedereintritt in die Erdatmosphäre am 27. Dezember 1968. Die Abbremsung und die Flugbahn einer solchen Raumkapsel („Blunt Body“) stellt ein besonderes ballistisches Problem dar, welches ganz im Geiste von L. EULER oder J.H. LAMBERT einer näheren analytischen Betrachtung bedarf. (Bild: NASA image S68-55292)*

ICBM - Programmes). Eine fundamentale theoretische Arbeit zu diesem Problem wurde von H.J. ALLEN und A.J. EGGERS 1953 veröffentlicht ([1])¹. ALLEN und EGGERS gingen wahrscheinlich 1953 von vereinfachten Gleichungen aus. Sie vernachlässigten sämtliche Scheinkräfte, in dem sie den Erdradius $R \rightarrow \infty$ setzen. Auch die Erdbeschleunigung g wird Null gesetzt, da sie gegen die aerodynamischen Kräfte zunächst vernachlässigt werden darf. Die Flugbahn relativ zum geraden Erdboden wird dann *ohne Auftriebskräfte* eine **Gerade** sein. Die beiden Grundgleichung lauten dann

$$\ddot{x} = -k \exp[-y/H_S] v \dot{x}, \quad \ddot{y} = -k \exp[-y/H_S] v \dot{y}$$

Die Referenzhöhe $y = 0$ soll hier der Erdboden sein. In jedem Fall bezieht sich dann $k \equiv k_D$ (drag-force) auf diese Referenzhöhe. Multipliziert man

¹HARRY JULIAN (HARVEY) ALLEN (1910 - 1977), Luftfahrtingenieur und Direktor des *Nasa Ames Research Center* von 1965-1969. Bekannt für seine „*blunt-body theory*“ aus dem Jahre 1953, die aber erst 1957 veröffentlicht werden durfte. Die Theorie war grundlegend für das Design der Mercury -, Gemini - und Apollo - Kapseln.

die erste Gleichung mit \dot{x} , die zweite mit \dot{y} und addiert beide, so erhält man wegen $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = v \dot{v}$

$$\frac{dv}{dt} + k e^{-y/H_S} v^2 = 0. \quad (5.23)$$

oder nach der Kettenregel

$$\frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} + k e^{-y/H_S} v^2 = 0. \quad (5.24)$$

Da aufgrund der Kraftverhältnisse klar ist, daß in diesem Modell die Bahn eine Gerade darstellt, substituieren wir in (5.24)

$$\frac{dy}{dt} = -v \sin[\Theta]. \quad (5.25)$$

Θ bezeichnet hier den als *positiv definierten konstanten Neigungswinkel* der „Wiedereinstiegsbahn“ in die Planetenatmosphäre. Setzt man dies in die Gleichung (5.24) ein, so erhält man

$$\sin[\Theta] \frac{dv}{dy} = k e^{-y/H_S} v. \quad (5.26)$$

Eine ähnliche Gleichung haben auch ALLEN - EGGERS 1953 betrachtet. Wir definieren jetzt als Referenzhöhe $y = 0$ die Erdoberfläche. In der Höhe $y \rightarrow +\infty$ soll die Geschwindigkeit des einfallenden Körpers v_0 sein. Der Parameter k bezieht sich nun auf seinen Wert am Erdboden. Es liegt jetzt der Gedanke nahe, anstatt y eine neue unabhängige variable η gemäß

$$\boxed{\eta = e^{-y/H_S}; \quad \frac{d\eta}{\eta} = -\frac{dy}{H_S}} \quad (5.27)$$

einzuführen. Am Erdboden $y = 0$ ist dann $\eta = 1$ und im luftleeren Weltraum $y \rightarrow \infty$ wird $\eta = 0$. Die Gleichung (5.26) vereinfacht sich dann zu

$$\boxed{\frac{dv}{d\eta} = -\frac{k H_S}{\sin[\Theta]} v; \quad \frac{d}{d\eta} \ln v = -\frac{k H_S}{\sin[\Theta]}.} \quad (5.28)$$

Mit diesen Prämissen lautet die Lösung der obigen Gleichung

$$v = v_0 \exp \left[-\frac{k H_S}{\sin[\Theta]} \eta \right] \quad (5.29)$$

Für den Betrag der Bremsbeschleunigung erhält man so

$$\mathbf{a} = k v_0^2 \exp \left[-2 \frac{k H_S}{\sin[\Theta]} e^{-y/H_S} - y/H_S \right]. \quad (5.30)$$

Diese Größe wird beim Eintauchen des Körpers in die Atmosphäre *maximal* bei der Höhe

$$y_a = H_S \ln \left[\frac{2 k H_S}{\sin[\Theta]} \right] \quad (5.31)$$

Bei dieser Höhe *maximaler Bremsung* beträgt die reduzierte Geschwindigkeit des Körpers im Falle $k H_S \ll 1$

$$v_a = v_0 e^{-1/2} \approx \mathbf{0.61} v_0 \quad (5.32)$$

Der Maximalwert der Bremsbeschleunigung beträgt dabei

$$\mathbf{a}_{max} = \frac{v_0^2 \sin[\Theta]}{2 e H_S}. \quad (5.33)$$

Dies ist ein überraschendes Resultat des *Allen-Eggers* Modells: *Der Wert der maximalen Bremsbeschleunigung ist unabhängig vom ballistischen Parameter k .* Dies ist äußerst bemerkenswert. Taucht zum Beispiel ein Körper mit der lokalen Entweichgeschwindigkeit $\sqrt{2 g R}$ (R = Erdradius) in die oberen Atmosphärenschichten ein, so kann man die maximale Bremsbeschleunigung mit der Formel

$$\mathbf{a}_{max} = g \frac{R}{e H_S} \sin[\Theta] \approx \mathbf{300} g \sin[\Theta] \quad (5.34)$$

abschätzen. Bei einem Winkel von 5° ergibt sich hier eine maximale Bremsung von **26 g** - zu viel für einen menschlichen Körper.

Die Ursache der *Invarianz* von a_{max} (5.33) bezüglich k beruht auf der speziellen Struktur der Funktion (5.30). Man kann dies in einem noch allgemeineren Satz zusammenfassen:

Satz: Die spezielle Funktionsklasse

$$\mathbf{f}[z] = k \exp [-(k a)^n \exp [-n z / b] - z / b]$$

mit den positiven reellen Zahlen a, b, k und n hat als Funktion von z im reellen Intervall $0 < z < \infty$ an der Stelle

$$z_m = b \ln [\sqrt[n]{n} k a]$$

ein Extremum

$$\mathbf{f}[z_m] = \frac{1}{\sqrt[n]{n} e a}. \quad (5.35)$$

Der Wert dieses Maximums ist eine Invariante bezüglich der Parameter k und b , hängt also von diesen beiden nicht ab. Die Größe e bezeichnet hierbei die Eulersche Zahl.

Das obige Modell kann jetzt erweitert werden, indem wir zunächst eine Auftriebskraft in die Dynamik einfügen. Die erweiterten Gleichungen des Allen-Eggers Modells lauten dann

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\exp[-y/H_S] (k_D \dot{x} + k_L \dot{y}) v, \\ \ddot{y} &= -\exp[-y/H_S] (k_D \dot{y} - k_L \dot{x}) v. \end{aligned}$$

Die Parameter $k_D \equiv k$ und k_L beschreiben die Wirkung der Bremskraft (drag force) und der Auftriebskraft (lift force bei $k_L > 0$). Wird wieder einerseits die erste mit \dot{x} , die zweite mit \dot{y} , andererseits die erste mit \dot{y} , die zweite mit \dot{x} multipliziert und einmal addiert, das andere Mal subtrahiert, so ergeben sich die beiden äquivalenten Polargleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -k_D \exp[-y/H_S] v^2, \\ \frac{d\theta}{dt} &= +k_L \exp[-y/H_S] v. \end{aligned}$$

Der Winkel θ (nicht Θ) wird hier wie gewöhnlich *negativ* angenommen, wenn der Körper in die Atmosphäre flach eindringt. Wir führen hier wieder die Variable η gemäß (5.27) ein und transformieren die obigen beiden Gleichungen in

$$\frac{d}{d\eta} \{\ln[v]\} = \frac{k_D H_S}{\sin[\theta]}, \quad \frac{d}{d\eta} \{\cos[\theta]\} = k_L H_S. \quad (5.36)$$

Die zweite dieser Differentialgleichungen ist sofort integrierbar. Wir erhalten mit der Anfangsbedingung bei $\eta = 0$

$$\cos[\theta] = \cos[\Theta] + k_L H_S \eta. \quad (5.37)$$

Taucht also der Körper mit dem Winkel Θ in die Atmosphäre ein, so wird sein Winkel θ immer flacher, bis er bei einem kritischen η zum erstenmal für kurze Zeit *horizontal* fliegt. Danach wird er wieder aufsteigen und aufgrund dünner werdender Luft und fehlender Gravitation wieder im Weltraum mit einer asymptotischen Grenzggeschwindigkeit $v_\infty < v_0$ verschwinden. Der ganze Vorgang gleicht so einem **inelastischen Abprall**. Um dieses genauer zu verstehen, setzen wir die Lösung (5.37) in die erste der Gleichungen (5.1) ein. Wir erhalten zunächst

$$\frac{d}{d\eta} \{\ln[v]\} = \pm \frac{k_D H_S}{\sqrt{1 - (\cos[\Theta] + k_L H_S \eta)^2}}. \quad (5.38)$$

Da eine Wurzel auftritt, bleibt zunächst unklar, auf welchem Funktionszweig man sich befindet, da $\sin[\theta]$ beim Abprall von den dichteren Atmosphärenschichten sein Vorzeichen wechselt. Es liegt hier der Gedanke nahe, anstatt $v \rightarrow v[\eta]$ die Umkehrfunktion $\eta \rightarrow \eta[v]$ zu betrachten. Zu diesem Zweck führen wir die Variable

$$\zeta = \ln \left[\frac{v_0}{v} \right]; \quad v = v_0 e^{-\zeta} \quad (5.39)$$

ein, da eine multiplikative Umeichung von v nach (5.36) immer möglich ist. Die quadrierte Form der Gleichung (5.38) läßt sich dann

$$1 - (\cos[\Theta] + k_L H_S \eta)^2 = (k_D H_S)^2 \left(\frac{d\eta}{d\zeta} \right)^2 \quad (5.40)$$

Eine Differentiation nach ζ führt schließlich auf die *scheinbare* Wellengleichung

$$k_D^2 H_S^2 \frac{d^2 \eta}{d\zeta^2} + k_L^2 H_S^2 \eta + k_L H_S \cos[\Theta] = 0 \quad (5.41)$$

Diese fundamentale Gleichung muss mit den Anfangsbedingungen ($\Theta > 0$)

$$\eta[0] = 0; \quad \eta'[0] = \frac{\sin[\Theta]}{k_D H_S}$$

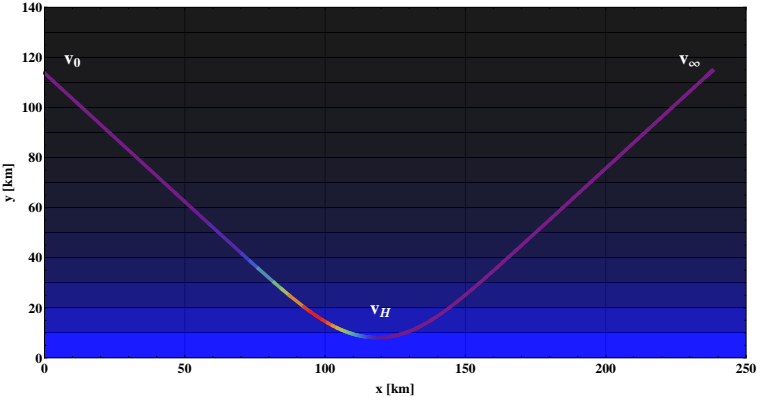


Fig. 5.4: Eintritt eines Flugkörpers mit Auftrieb ($k_L = 0.1/\text{km}$; $k_D = 0.3/\text{km}$) in eine idealisierte Atmosphäre ohne Gravitation, in der die Dichte mit der Eindringtiefe exponentiell zunimmt. Die Flugdaten sind $\Theta = 45^\circ$, $v_0 = 8\text{km/s}$, $v_\infty = 0.072\text{km/s}$ und die minimale Höhe $H_{\min} = 8.0\text{ km}$. Der dynamische Vorgang gleicht einer inelastischen Reflexion mit identischem Eintritts- und Austrittswinkel.

gelöst werden. Man erhält

$$\eta = \frac{1}{k_L H_S} \left(\cos \left[\frac{k_L}{k_D} \zeta - \Theta \right] - \cos[\Theta] \right). \quad (5.42)$$

Entwickeln wir (5.42) nach Potenzen von ζ , so erhält man

$$\eta = \frac{\sin[\Theta]}{k_D H_S} \zeta - \frac{k_L \cos[\Theta]}{2 k_D^2 H_S} \zeta^2 - \frac{k_L^2 \sin[\Theta]}{6 k_D^3 H_S} \zeta^3 + \dots \quad (5.43)$$

Der erste Term ist identisch mit den Definitionen (5.27), (5.39) und (5.29) des direkten ballistischen Eintauchens ohne Auftriebskräfte.

Da $\zeta \equiv \ln[v_0/v] > 0$ ist, wird η genau dann null, wenn $\zeta = 0$ oder $\zeta = 2\Theta k_D/k_L$ ist. Aus dieser Bedingung folgt für die asymptotische Entweichgeschwindigkeit nach dem Abprall

$$v_\infty = v_0 \exp \left[-2 \frac{k_D}{k_L} \Theta \right]. \quad (5.44)$$

Den tiefsten Punkt in der Atmosphäre erreicht der Körper, wenn $\eta[\zeta]$ maximal wird. Mit (5.42) und (5.27) ergibt sich so

$$\zeta_{min} = \frac{k_D}{k_L} \Theta; \quad H_{min} = H_S \ln \left[\frac{k_L H_S}{1 - \cos[\Theta]} \right]. \quad (5.45)$$

Die Geschwindigkeit in der minimalen Höhe H_{min} beträgt zudem

$$v_{H_{min}} = v_0 \exp \left[-\frac{k_D}{k_L} \Theta \right]. \quad (5.46)$$

Bemerkenswert ist hier, dass mit Auftrieb *die Eindringtiefe H_{min} nicht von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 abhängig ist.*

Wir können jetzt im Rahmen dieses idealisierten aerodynamischen Modelles *ohne Gravitation* eine Abschätzung über die Abbremsung von der zweiten kosmischen Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2gR}$ auf etwa die erste kosmische Geschwindigkeit \sqrt{gR} (Kreisbahngeschwindigkeit) machen. Der Beschleunigungsverlauf als von Funktion von ζ lautet wegen $\mathbf{a} = k_D v_0^2 \eta$ explizit

$$\mathbf{a} = 2g k_D R \eta[\zeta] e^{-2\zeta}. \quad (5.47)$$

Maximal wird dieser Ausdruck kurz vor dem Durchlaufen des minimalen Bahnpunktes. Mit (5.45) folgt dann genähert

$$\mathbf{a}_{max} \sim g \frac{R}{H_S} \frac{k_D}{k_L} \Theta^2 e^{-2k_D/k_L \Theta}. \quad (5.48)$$

Die maximale Bremsbeschleunigung hängt im *Modell ohne Gravitation* entscheidend vom Verhältnis k_D/k_L und natürlich vom Eintrittswinkel ab. Bei den *Apollo-Missionen* galt $\Theta \sim 6.5^\circ$. Mit $k_D/k_L = 3$ und $R/H_S \sim 800$ folgt die Abschätzung

$$a_{max} \approx 15g. \quad (5.49)$$

Dieser Wert wäre für einen menschlichen Körper noch zu hoch. Bei einem Winkel von 3.5° ergibt sich noch eine maximale Bremsung von etwa $6g$ - genau der Wert der Apollo-Missionen. Wir haben damit gezeigt, dass beim Eintauchen in die Erdatmosphäre es günstig ist, dass die Raumkapsel nicht geradewegs in tiefere Schichten eindringt, sondern zunächst wieder leicht aufsteigt. Später werden wir sehen, dass bei $v_0 \sim \sqrt{2gR}$ durch Berücksichtigung der zentrifugalen Bahnbeschleunigung der Bremswert auch bei $\Theta = 6.5^\circ$ auf etwas $6g$ gedrückt werden kann.

5.3 Ballistischer Wiedereintritt (Re-Entry) aus großen Höhen

Im Kapitel über das idealisierte ALLEN - EGGERS Modells haben wir schon die dynamischen Verhältnisse beim Wiedereintritt unter Brems- und Auftriebskräften diskutiert. Die Gravitation wurde dort noch nicht berücksichtigt. Die damaligen Rechnungen aus dem Jahre 1953 zum thermischen Verhalten haben wesentlich dazu beigetragen, den Raumkapseln *Mercury*, *Gemini* und *Apollo* in den 1960er Jahren das charakteristische „*blunt-body*“ („*Stumpfer Körper*“) - Aussehen zu geben, damit durch die Schockwelle die thermische Erhitzung zum Körper auf Abstand bleibt.

In den 1950er Jahren wurden sehr unterschiedliche Konzepten diskutiert, wie eine Raumkapsel aus einer Erdumlaufbahn wieder in die Erdatmosphäre eintauchen kann (**Reentry**), ohne zu verglühen. Neben einem *Gleitmechanismus* und einem *dip* und *skip* Flugbahnmanöver („*Eintauchen und Überspringen*“) war der *semi-ballistische Wiedereintritt* das kostengünstigste und sicherste Konzept. Um aber eine *realistische Wiedereinstiegsbahn* einer Raumkapsel in eine Planetenatmosphäre zu berechnen, reichen die vereinfachten Annahmen - besonders die Vernachlässigung der Gravitation - des ALLEN - EGGERS Modelles nicht mehr aus. Die hypersonische Bahn ist bei *sehr flachem Einstieg* in die Atmosphäre ($|\Theta| \approx 5^\circ$) gegenüber der Erdoberfläche auch *ohne Auftrieb* keine Gerade mehr, sondern eine sehr flache nach oben geöffnete Parabel. Zwei wichtige Fragen drängen sich hier auf:([38])²

- Welche Bahnparameter führen zur Landung und nicht zurück in den Orbit?
- Welche maximalen Bremsbeschleunigungen treten bei einem optimal günstigen Wiedereintritt auf, wenn man Gravitation, aber keinen Auftrieb berücksichtigt?
- Wenn der mögliche Eintrittskorridor sehr eng ist, kann eine reine Bremsbeschleunigung eine sichere Landung garantieren oder muss zusätzlich eine Auftriebskontrolle zur Verfügung stehen (drag; lift-off; lift down)

²Einen Überblick gibt das NASA-eBook "[Coming Home](#)"



Fig. 5.5: Die Apollo - Raumkapseln mussten beim Wiedereintauchen in die Erdatmosphäre mit über 10 km/s Geschwindigkeit einen sehr flachen Eintauchwinkel einhalten, der in 100 km Höhe nur etwa 5.5 bis 6.5 Grad Neigung zur Erdoberfläche hatte. (Bildquelle: NASA)

Eine detaillierte Antwort auf diese Fragen lässt sich natürlich durch *numerische Integration* der gekoppelten Differentialgleichungen (5.18, 5.19) erreichen. Wir wiederholen die dynamischen Bewegungsgleichungen (5.18) und (5.19) zunächst ganz allgemein mit Auftrieb in der Form

$$\ddot{x} = -k_D e^{-\frac{y}{H_s}} v \dot{x} - k_L e^{-\frac{y}{H_s}} v \dot{y} - \frac{\dot{x} \dot{y}}{R}, \quad (5.50)$$

$$\ddot{y} = -k_D e^{-\frac{y}{H_s}} v \dot{y} + k_L e^{-\frac{y}{H_s}} v \dot{x} + \frac{\dot{x}^2}{R} - g, \quad (5.51)$$

wobei $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ist. k_D (*drag force*) und k_L (*lift force*) bezeichnen wieder die *aerodynamischen Koeffizienten* am Erdboden im Abstand R vom Erdmittelpunkt in der Referenzhöhe $y = 0$, welche hier nicht die Erdoberfläche bezeichnet. Im Falle $k_L = 0$ spricht man von einem reinen *ballistischen Wiedereintritt*.

Im Folgenden wollen wir zunächst versuchen, die Differentialgleichung (5.41) mit einem in der Nähe der Erdoberfläche wirkenden Gravitationsfeld zu erweitern. Multiplizieren wir die obigen beiden Gleichungen

abwechselnd mit \dot{x} und \dot{y} und addieren bzw. subtrahieren sie voneinander, so erhalten wir die Gleichungen (bei Abstieg gilt $\theta < 0$)

$$\frac{dv}{dt} + k_D e^{-y/H_S} v^2 + g \sin[\theta] = 0 \quad (5.52)$$

und

$$v \frac{d\theta}{dt} = k_L e^{-y/H_S} v^2 - \left(g - \frac{v^2}{R} \right) \cos[\theta]. \quad (5.53)$$

In einem *ersten Schritt* wollen wir den bei Flachbahnen kleinen gravitativen Term $g \sin[\theta]$ in (5.52) gegenüber den aerodynamischen Kräften vernachlässigen. Ansonsten analysieren wir die beiden Gleichungen (5.52) und (5.53) in ähnlicher Weise wie im Kapitel über das ALLEN-EGGERS Modell. Mit der neuen unabhängigen Variablen η (5.27) erhalten wir wegen

$$\frac{d}{dt} = v \sin[\theta] \frac{d}{dy} = -\frac{v}{H_S} \sin[\theta] \eta \frac{d}{d\eta}$$

jetzt anstatt (5.36)

$$\frac{d}{d\eta} \{\ln v\} = \frac{k_D H_S}{\sin[\theta]}, \quad (5.54)$$

$$\eta \left\{ \sin[\theta] \frac{d\theta}{d\eta} + k_L H_S \right\} = \left(\frac{g H_S}{v^2} - \frac{H_S}{R} \right) \cos[\theta] \quad (5.55)$$

Im nächsten Schritt machen wir für den sehr flachen ballistischen Wiedereintritt die Näherung

$$\sin[\theta] \sim \theta; \quad \cos[\theta] \sim 1. \quad (5.56)$$

Außerdem soll der Flugkörper zu Beginn mit der ersten kosmischen Geschwindigkeit \sqrt{gR} sehr flach in die obere Atmosphäre eintauchen. Also definieren wir den Parameter ζ und setzen mit (5.39)

$$v = \sqrt{gR} e^{-\zeta}. \quad (5.57)$$

Eine solche Parametrisierung ist nur gestattet, wenn während des Fluges die Geschwindigkeit v im Modell mit wachsendem ζ *monoton abnimmt*. Es dürfen also in der ballistischen Kurve nicht zwei unterschiedliche

Bahnpunkte mit derselben Geschwindigkeit auftreten. Mit alledem gilt anstatt (5.54),(5.55) jetzt

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = -\frac{k_D H_S}{\theta} \quad (5.58)$$

$$\eta \left\{ \theta \frac{d\theta}{d\eta} + k_L H_S \right\} = \frac{H_S}{R} (e^{2\zeta} - 1) \quad (5.59)$$

Wir lösen die erste Gleichung (5.58) nach θ auf und erhalten

$$\theta \frac{d\zeta}{d\eta} = -k_D H_S; \quad \frac{d\theta}{d\zeta} = -k_D H_S \frac{d^2\eta}{d\zeta^2}. \quad (5.60)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die zweite Gleichung (5.59), die wir auch

$$\eta \left\{ \theta \frac{d\zeta}{d\eta} \frac{d\theta}{d\zeta} + k_L H_S \right\} = \frac{H_S}{R} (e^{2\zeta} - 1)$$

schreiben können, ein, so folgt unmittelbar

$$\left(k_D \sqrt{R H_S} \right)^2 \eta \frac{d^2\eta}{d\zeta^2} + k_L R \eta = e^{2\zeta} - 1.$$

Führen wir noch die Umeichung

$$\eta[\zeta] = \frac{\mathbf{Y}[\zeta]}{k_D \sqrt{R H_S}} \quad (5.61)$$

ein, so folgt für $\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}[\zeta]$ die bemerkenswerte Differentialgleichung

$$\boxed{\mathbf{Y} \frac{d^2\mathbf{Y}}{d\zeta^2} + \lambda \mathbf{Y} = e^{2\zeta} - 1.} \quad (5.62)$$

mit der *Auftriebs-Kennzahl*

$$\lambda = \frac{k_L}{k_D} \sqrt{\frac{R}{H_S}}. \quad (5.63)$$

Eine analoge Gleichung wie (5.62) wurde zum erstenmal von dem russischen Aerodynamiker V.A. YAROSHEVSKY (1932-2014) im Jahre 1964



Fig. 5.6: Gedenkplakette für den legendären unbemannten Flug der CCCP-Raumfähre Buran (Schneesturm) 1.01 vom 15. November 1988. Auch als Erinnerung an V.A. YAROSHEVSKY und seine fundamentale Modellgleichung für den Wiedereintritt eines Satelliten in die Erdatmosphäre. Der Auftriebsparameter ist hier mit η anstatt λ bezeichnet.

veröffentlicht ([65, 66])³. Sie spielte Ende der 1950er Jahre wohl eine wichtige Rolle, um die erste bemannte Raumkapsel *Wostok I* im Jahre 1961 mit J. GAGARIN (1934-1968) fast ohne Auftrieb ($k_L = 0$) sicher zur Erde zurückzubringen. Ohne Gravitation und Zentrifugalkraft ist in (5.62) die rechte Seite der Gleichung Null. Interessant ist dann ein Vergleich mit der Gleichung (5.41). Entwickelt man deren Lösung (5.42) bis zur quadratischen Ordnung in ζ , so ist diese Funktion auch Lösung der obigen Gleichung (5.62). Dies zeigt die schöne Konsistenz dieser fundamentalen asymptotischen Gleichung.

Um den zurückgelegten Weg x längs der Planetenoberfläche zu berechnen, gehen wir wieder zur Gleichung (5.53) ohne den kleinen Gravitati-

³Die Gleichung von YAROSHEVSKY mit einem Auftriebsterm war auch beim Problem des unbemannten Raumgleiters „Buran“ beim Wiedereintritt in die Erdatmosphäre im Jahre 1988 von Relevanz.

onsterm zurück und schreiben mit der Kettenregel

$$\frac{dv}{dx} + k_D \eta v = 0.$$

Mit (5.57) erhalten wir schließlich

$$\boxed{dx = \frac{d\zeta}{k_D \eta} \equiv \sqrt{R H_S} \frac{d\zeta}{\mathbf{Y}[\zeta]}. \quad (5.64)}$$

Wenn $\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}[\zeta]$ aus (5.62) bekannt ist, kann auch die Wegstrecke x nach dem Eintauchen berechnet werden. Im Falle $\zeta_0 = 0$ ist die Stelle $\zeta = 0$ eine Singularität, die im Spezialfall $\lambda = 0$ durch entsprechend modifizierte Anfangsbedingungen umgangen werden muss. Für den Eintauchwinkel θ erhalten wir mit (5.60) und (5.61)

$$\theta = -\sqrt{\frac{H_S}{R}} \frac{d\mathbf{Y}}{d\zeta}. \quad (5.65)$$

Mit $H_S = 8$ km und $R = 6371$ km entspricht die Bogenmaß-Größe $\sqrt{H_S/R} \sim 2.03^\circ$ Winkelgrad. Auch die dazu gehörende Flughöhe läßt sich mit \mathbf{Y} ausdrücken. Wegen

$$e^{-y/H_S} \equiv \eta = \frac{\mathbf{Y}[\zeta]}{k_D \sqrt{R H_S}} \quad (5.66)$$

folgt für die Flughöhe

$$H_\zeta = \frac{1}{2} H_S \ln \left[\frac{R}{H_S} \right] - H_S \ln \left[\frac{\mathbf{Y}[\zeta]}{k_D H_S} \right]. \quad (5.67)$$

Der erste Höhenterm beträgt mit $H_S = 8$ km und $R = 6371$ km etwa 26 km. Der Flugkörper erreicht diese Höhe, wenn $\mathbf{Y}[\zeta] = k_D H_S$ ist.

Eine allgemeine exakte analytische Lösung - selbst in parametrisierter Form - scheint es für die Schlüsselgleichung (5.62) nicht zu geben. Wir spezialisieren zunächst unsere Diskussion von (5.62) auf $\lambda = 0$ (kein Auftrieb). Dann lautet sie zunächst

$$\mathbf{Y} \frac{d^2 \mathbf{Y}}{d\zeta^2} = e^{2\zeta} - 1.$$

Eine Theorie in erster Näherung erhalten wir, indem wir die rechte Seite dieser Gleichung bis zur ersten Ordnung um die Singularität $\zeta = 0$ durch die spezielle EMDEN-FOWLER Gleichung

$$\mathbf{Y} \frac{d^2 \mathbf{Y}}{d\zeta^2} = 2\zeta$$

approximieren. Als Anfangsbedingungen setzen wir $\mathbf{Y}[0] = \mathbf{Y}'[0] = 0$, da die Raumkapsel aus großer Höhe mit dem Neigungswinkel $\Theta = 0$ in die tieferen Atmosphärenschichten eintauchen soll. Die beiden möglichen Anfangsbedingungen $\mathbf{Y}'[0] = 0$ und $\mathbf{Y}'[0] \neq 0$ bestimmen dabei zwei unabhängige Lösungen der Fundamentalgleichung (5.62), worauf wir noch eingehen werden. Durch einen Potenzreihenansatz ergibt sich so die *partikuläre* Lösung

$$\mathbf{Y}[\zeta] = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\zeta^{3/2}. \quad (5.68)$$

Für den Bremsverlauf $k_D v^2 \eta[\zeta]$ gilt zunächst allgemein

$$\mathbf{a} = g \sqrt{\frac{R}{H_S}} \mathbf{Y}[\zeta] e^{-2\zeta}.$$

Maximal wird dieser Ausdruck bei ζ_m , welches der Gleichung

$$\mathbf{Y}'[\zeta_m] = 2\mathbf{Y}[\zeta_m] \quad (5.69)$$

genügt. Mit (5.68) gilt so $\zeta_m = 3/4$. Das führt zu der ersten Approximation

$$\mathbf{a}_{max} = \frac{3}{2\sqrt{2} e^{3/2}} g \sqrt{\frac{R}{H_S}}.$$

Wieder ist die maximale Bremsbeschleunigung unabhängig von dem Parameter k_D . Der numerische Koeffizient vor dem g ergibt sich in dieser ersten Approximation zu **0.2366...** Um diese wichtige Zahl noch genauer auszurechnen, lösen wir (5.62) durch eine Potenzreihe

$$\mathbf{Y}[\zeta] = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\zeta^{3/2} \left(1 + \frac{1}{6}\zeta + \frac{1}{24}\zeta^2 + \frac{47}{4752}\zeta^3 + \dots \right). \quad (5.70)$$

oder noch besser durch die Darstellung

$$\mathbf{Y}[\zeta] = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\zeta^{3/2} \exp \left[\frac{\zeta}{6} + \frac{\zeta^2}{36} + \frac{4\zeta^3}{891} + \dots \right]. \quad (5.71)$$

Man erhält für die maximale Abbremsung des reinen *ballistic reentry* nach genauer Rechnung das Ergebnis

$$\mathbf{a}_{max} = \mathbf{0.27566...} \, g \sqrt{\frac{R}{H_S}} \quad (5.72)$$

mit der nun durch numerische Integration berechneten Konstanten. Mit $H_S = 7$ km und $R = 6371$ km ergibt sich der maximale Beschleunigungswert zu

$$\mathbf{a}_{max} \sim \mathbf{8.3} \, g. \quad (5.73)$$

Dies ist der klassische maximale „g-Wert“ bei einem *rein ballistischen Wiedereintritt (ballistic re-entry) ohne Auftrieb*. Dies passierte zum Beispiel bei den Rückkehrmissionen von Sojus TMA-10 und Sojus TMA-11 im Jahre 2007/2008 von der ISS, wo durch eine fehlerhafte Trennfunktion beim Abstieg die Raumkapsel automatisch auf rein ballistischen Wiedereintritt schaltete und eine maximale Bremsbeschleunigung von $8.5 \, g$ auftrat. Für die entsprechende kritische Höhe maximaler Abbremsung folgt

$$H_a = \frac{1}{2} H_S \ln \left[\frac{R}{H_S} \right] + H_S \ln [\mathbf{0.669...} \, k_D H_S]. \quad (5.74)$$

Die Geschwindigkeit hat sich da schon auf 43% des ursprünglichen Wertes reduziert.

Lässt sich nun die maximale Abbremsung (5.72) im Falle eines *seichten Eintauchens* durch Einführung eines Auftriebs verringern? Die Antwort lautet : „Ja!“ Im Falle $\lambda \neq 0$ hat die Gleichung (5.62) mit der Anfangsbedingung $\mathbf{Y}[0] = 0$ (Eintauchen mit Kreisbahngeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{gR}$ aus „unendlicher“ Höhe) um den Punkt $\zeta = 0$ zwei Lösungszweige. Der eine Zweig hat die Eigenschaft $\mathbf{Y}'[0] = 0$ und der andere Zweig die Eigenschaft $\mathbf{Y}'[0] = c_0 = \sqrt{R/H_S} \Theta$. Um die singuläre Stelle $\zeta = 0$ ergeben sich so die Reihenentwicklungen

$$\mathbf{Y}_0[\zeta] = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \zeta^{3/2} - \frac{4}{11} \lambda \zeta^2 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{6\lambda^2}{121} \right) \zeta^{5/2} + .. \quad (5.75)$$

$$\mathbf{Y}_1[\zeta] = c_1 \zeta - \frac{\lambda c_1 - 2}{2 c_1} \zeta^2 + \frac{2 c_1^2 + \lambda c_1 - 2}{6 c_1^3} \zeta^3 + \dots \quad (5.76)$$

λ	$\mathbf{Y}_1 e^{-2\zeta}$	$\mathbf{Y}_0 e^{-2\zeta}$
1.0	0.37735	0.23344
2.0	0.20467	0.19574
3.0	0.15592	0.16328
4.0	0.13349	0.13679
5.0	0.11790	0.11707
6.0	0.10529	0.10395
7.0	0.09485	0.09469
8.0	0.08628	0.08683
9.0	0.07925	0.07959
10.0	0.07334	0.07319

Tab. 5.1: Die Kennzahlen $C[\lambda]$ für die maximale Abbremsung, also den maximalen Wert der Funktion $\mathbf{Y}_{0,1}e^{-2\zeta}$ während des Wiedereintritts in die Erdatmosphäre mit Auftrieb. Nur die Kennzahl für das Maximum, von $\mathbf{Y}_0e^{-2\zeta}$ strebt im Falle $\lambda \rightarrow 0$ gegen den klassischen Wert 0.27566 von (5.72).

mit dem winkelabhängigen Koeffizienten (Θ in Bogenmaß)

$$c_1 = \sqrt{\frac{R}{H_S}} \sin[\Theta]$$

Mit Hilfe dieser Reihen lassen sich Startwerte in der Umgebung von $\zeta \rightarrow 0$ für eine numerische Integration der Gleichung (5.62) finden. Man stellt fest, dass die Funktion \mathbf{Y}_1 die Gleichgewichtsflugbahn eines *hypersonischen Gleiters* aus den hohen Atmosphärenschichten mit dem Eintrittswinkel Θ beschreibt, während \mathbf{Y}_0 die *ballistische* Eintrittsbahn eines Flugkörpers mit dem singulären Eintrittswinkel $\Theta = 0$ aus einer Kreisbahn beschreibt.

Die durch \mathbf{Y}_1 beschriebene Bahn macht kleine wellenartige Bewegungen um die fast ungestörte Gleitflugbahn, die man als *Phygoide* mit „*Rikoschettieren*“ bezeichnen kann. Dies spiegelt sich auch im Bremsverlauf während des Eintritts in die Atmosphäre wider. In der Figur (5.7) wird dieser Verlauf als Funktion der abnehmenden Geschwindigkeit für drei unterschiedliche Eintrittswinkel dargestellt.

In Tabelle (5.1) kann man erkennen, dass mit einem realistischen Auftriebsparameter $\lambda \sim 10$ für die Erdatmosphäre die maximale Abbremsung während des Abstieges auf unter $a_{max} \sim 4g$ gedrückt werden kann.

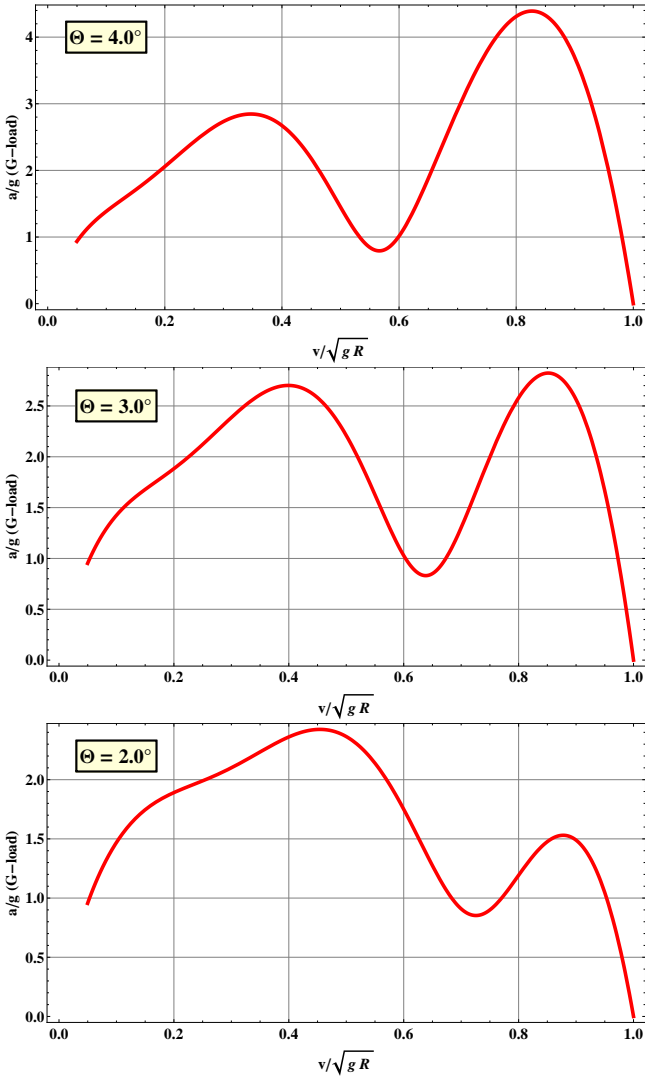


Fig. 5.7: Bremsverlauf für drei Eintrittswinkel. $k_D/k_L = 3$. Wellenförmige Strukturen sind sichtbar (*Phygoide*). Zudem treten zwei Bremsphasen auf.

5.4 Skip Re-Entry aus großen Höhen

Ein wirklicher **skip reentry** tritt dann auf, wenn ein Raumfahrzeug mit der zweiten kosmischen Geschwindigkeit

$$v_{\infty} = \sqrt{2gR} \quad (5.77)$$

mit flachem Eintauchwinkel in die Erdatmosphäre oder Planetenatmosphäre eintritt. Dies ist zum Beispiel für alle Mondmissionen mit Rückkehr der Fall. Hier reichen zur Beschreibung der Bahn die Gleichungen von YAROSHEVSKY nicht mehr aus. Für diesen Fall des *coming home* ist es aber in jedem Fall günstiger und auch notwendig, die ursprünglichen Bewegungsgleichungen (5.18) und (5.19) numerisch zu integrieren.

Die numerische Integration geht von den beiden Bewegungsgleichungen (5.18) und (5.19) mit den inversen Längen k_D des Luftwiderstandes und des Auftriebes k_L

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -e^{-y/H_S} (k_D v \dot{x} + k_L v \dot{y}) - \frac{\dot{x} \dot{y}}{R}, \\ \ddot{y} &= -e^{-y/H_S} (k_D v \dot{y} - k_L v \dot{x}) + \frac{\dot{x}^2}{R} - g. \end{aligned}$$

aus. Wir führen zunächst die *ungleichen* Skalierungen

$$\begin{aligned} x[t] &= \sqrt{H_S R} X[\tau]; \\ y[t] &= H_S Y[\tau] + H_S \ln[k_D \sqrt{H_S R}] \end{aligned} \quad (5.78)$$

mit der dimensionslosen Zeit

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{H_S}} t \quad (5.79)$$

ein. Mit $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ und $H_S = 8000 \text{ m}$ entspricht dem Zeitintervall $\Delta\tau = 1$ die typische Zeitspanne

$$\Delta t = \sqrt{\frac{H_S}{g}} \approx \mathbf{30 \text{ sec.}}$$

Die dimensionslose Höhenskalierung $Y[\tau]$ hängt mit der *Yaroshevsky - Funktion* \mathbf{Y} durch die Relation (siehe (5.66))

$$Y = -\ln[\mathbf{Y}] \quad (5.80)$$

zusammen. Der Erdboden $y = 0$ ist nun aber nicht mehr identisch mit $Y = 0$. Mit (5.78) folgt für den Erdboden der Y - Wert

$$-\ln \left[k_D H_S \left(\frac{R}{H_S} \right)^{1/2} \right]$$

Als obere Grenze nehmen wir die Kármán-Linie (siehe Gleichung (5.167)). Damit gilt für den physikalisch sinnvollen Bereich das Intervall

$$-\ln \left[k_D H_S \left(\frac{R}{H_S} \right)^{1/2} \right] < Y[\tau] < -\ln \left[k_D H_S \left(\frac{H_S}{R} \right)^{3/2} \right]. \quad (5.81)$$

Die untere Grenze liegt für $k_D H_S \sim 2$ bei etwa -4 , die obere Grenze grob bei $+10$.

Mit alledem folgt zunächst für die Bewegungsgleichung in horizontaler und vertikaler Richtung

$$X'' = -e^{-Y} \sqrt{X'^2 + \beta^2 Y'^2} (X' + \beta^2 \lambda Y') - \beta^2 X' Y', \quad (5.82)$$

$$Y'' = -e^{-Y} \sqrt{X'^2 + \beta^2 Y'^2} (Y' - \lambda X') + X'^2 - 1. \quad (5.83)$$

In diesen Gleichungen tritt neben dem Auftriebsparameter λ (siehe 5.63) der für eine typische Planetenatmosphäre relativ kleine Parameter

$$\beta = \sqrt{\frac{H_S}{R}} \quad (5.84)$$

auf. Bei der Erde beträgt dieser Parameter β wegen $H_S \approx 8$ km und $R \approx 6371$ km etwa 0.0354, das Quadrat also nur 0.001. Quadrate von β wollen wir zunächst in unserem Modell vernachlässigen. Wir wollen deshalb die obigen Gleichungen weiter vereinfachen. Da die Reentry - Bahnen immer sehr flach zur Planetenatmosphäre sind, werden wir für unser numerisch - analytisches Modell den Term proportional β vernachlässigen. In dieser „Flachbahnnäherung“ gilt nun sehr kompakt

$$X'' + e^{-Y} X'^2 = 0, \quad (5.85)$$

$$Y'' + e^{-Y} (X' Y' - \lambda X'^2) + 1 - X'^2 = 0. \quad (5.86)$$

Als einzige Kennzahl tritt in diesen idealisierten Bewegungsgleichungen nur noch der Auftriebsparameter λ auf. Damit sind beide gekoppelten

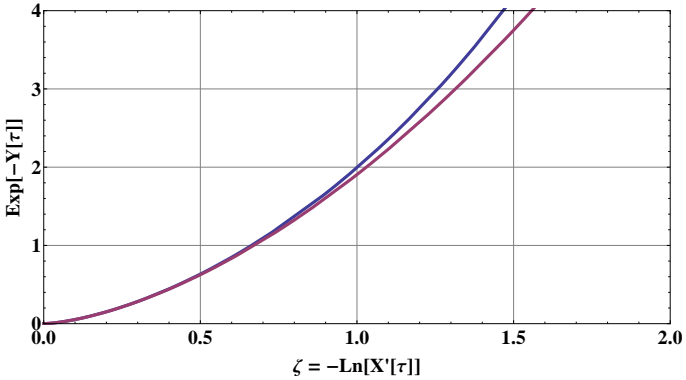


Fig. 5.8: Ein Vergleich der Yaroshevsky-Funktion $\mathbf{Y}[\zeta]$ einschließlich der ersten Korrektur (rot) mit der entsprechenden Funktion $\exp[-Y[\tau]]$ als Funktion von $\zeta = -\ln[X'[\tau]]$.

Gleichungen der YAROSHEVSKY- Gleichung (5.62) äquivalent. Wir wollen dies direkt zeigen, indem wir die kritische Kennzahl **0.275...** der maximalen Beschleunigung aus den obigen Gleichungen ableiten. Wir setzen also zunächst $\lambda = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} X'' + e^{-Y} X'^2 &= 0, \\ Y'' + e^{-Y} X' Y' + 1 - X'^2 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen müssen wir jetzt bei einem ballistischen Eintritt mit den Anfangsbedingungen

$$X[0] = 0; \quad X'[0] = 1; \quad Y[0] = 10; \quad Y'[0] = 0$$

lösen. Der Bremsverlauf ergibt sich zunächst zu (hier negativ normiert)

$$\mathbf{a} = -(X'[\tau]^2 + \beta^2 Y'[\tau]^2) e^{-Y[\tau]} g \sqrt{\frac{R}{H_S}} \quad (5.87)$$

Da $\beta \ll 1$ (siehe (5.84)) ist, können wir mit der obigen Bewegungsgleichungen für den Verlauf genügend genau auch

$$\mathbf{a} = X''[\tau] g \sqrt{\frac{R}{H_S}} \quad (5.88)$$

schreiben. Eine numerische Integration ergibt als Maximum der Bremsbeschleunigung bei einem ballistischen Eintritt die kritische Zahl **0.2758...**, in sehr guter Übereinstimmung mit der *Yaroshevsky-Gleichung*. Auch die direkte Korrespondenz

$$\mathbf{Y}[\zeta] \equiv e^{-Y[\tau]}; \quad \zeta = -\ln[X'[\tau]] \quad (5.89)$$

wird durch ein Vergleich mit der Funktion (5.70) in der Figur (5.8) sehr schön bestätigt.

Bei einer Mondrückkehrbahn wählen wir in den dimensionslosen Skalen jetzt die Eintrittsdaten

$$\begin{aligned} X[0] &= 0; & X'[0] &= \sqrt{2} \cos[\Theta]; \\ Y[0] &= 10; & Y'[0] &= -\sqrt{\frac{2}{\beta}} \sin[\Theta]. \end{aligned}$$

bei dieser wesentlich höheren Geschwindigkeit tritt trotz flachem Eintritt das Phänomen auf, dass durch den konstanten Auftrieb die Raumkapsel zwar abgebremst, aber danach wieder so stark abprallt, dass sie einen sehr weiten Bogen bis zum nächsten Wiedereintritt vollführt. Es muss daher nach dem Abprall Vom Flugmodus “Auftrieb” zum Flugmodus “Abtrieb” gewechselt werden. Der Parameter λ muss also sein Vorzeichen wechseln.

Frühere Abschätzungen lassen vermuten, daß die Abstiegsbahn einen Sattelpunkt hat, wenn $\mathbf{C} \approx 10$ ist. Diese kritische Kennzahl \mathbf{C} können wir jetzt genau numerisch berechnen. Die zwei Bedingungen für einen Sattelpunkt zu irgendeinem Zeitpunkt τ_s lauten

$$Y'[\tau_s] = 0; \quad X'[\tau_s] = 1. \quad (5.90)$$

Erst jetzt wird der freie Kurvenparameter \mathbf{C} zu einer kritischen Kennzahl, welche mit (??) die Sattelpunkt - Passage bestimmt. Nach einer parametrischen numerischen Integration der beiden Bewegungsgleichungen lassen sich die Hilfsvariable τ_s und die wichtige Kennzahl \mathbf{C} aus den zwei Bedingungen (5.90) bestimmen. Die kritische Kennzahl \mathbf{C} für eine Wiedereintrittsbahn *mit Sattelpunkt* ist in diesem mathematischen Modell dann genähert

$$\mathbf{C}_{inflexion} = 10.6674 \dots \quad (5.91)$$

Diesen Wert in (??) eingesetzt führt zur anvisierten Perigäumshöhe H_P für eine Sattelpunktbahn. Im Vergleich zur Relation (5.206) mit $\mathbf{C} =$

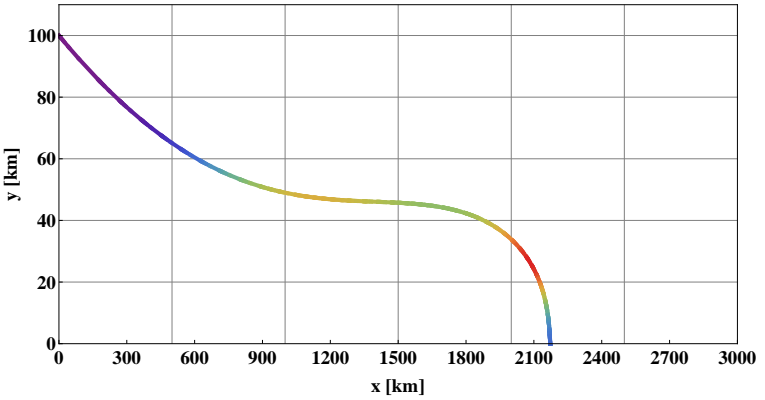


Fig. 5.9: Eine ballistische Eintauchbahnen mit einem Eintrittswinkel von 5.1 Grad. Die Farbcodierung entspricht der Stärke der Bremsbeschleunigung, die in der zweiten Bremsphase am größten ist. Dagen ist die thermischen Belastung der Raumkapsel bei der ersten Bremsphase am größten. Die Bahn form ist sehr sensitiv bezüglich Änderungen der Flug-Parameter, so dass beim rein ballistischen Wiedereintritt der erlaubte Flugkorridor schwer einzuhalten ist. Aus diesem Grunde konnten die Apollokapseln in den 1960er und 1970er Jahren durch wechselnde Verlagerungen des Schwerpunktes (einfache 180 Grad - Drehung der Raumkapsel um die Symmetrieachse der Rotation) kleine aerodynamische Auftriebe oder Abtriebe erzeugen, um bei Nichteinhaltung des Korridors schnell Feinkorrekturen durchführen zu können.

$\sqrt{2\pi}/\ln[2] \approx 3.616$ ist der Parameter fast um das Dreifache größer. In der Figur (5.9) sind drei unterschiedliche ballistische Wiedereintrittsbahnen graphisch veranschaulicht. Die Parameter sind dabei $H_S = 8000 \text{ m}$, $k = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$, und $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Wie man sieht, kann schon eine Erhöhung der Perigäumshöhe um 1 km fatale Folgen haben. In Fig (5.10) ist zusätzlich die Bremsbeschleunigung für die Bahn mit dem Parameter $H_P = 52 \text{ km}$ dargestellt. Das Hauptcharakteristikum sind hier zwei Bremsphasen, welche eine Folge des doppelten Eintauchens in die oberen Atmosphärenschichten ist. Der mittlere Wert der Abbremsung (**G-load**) lässt sich dabei recht gut durch die Formel

$$\mathbf{a}_c \sim g k R \exp \left[-\frac{H_P}{H_S} \right] \quad (5.92)$$

abschätzen.

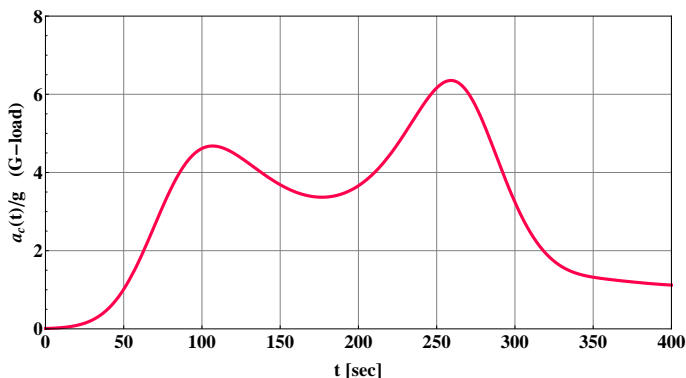


Fig. 5.10: Die Bremsbeschleunigung als Funktion der Zeit bei einer ballistischen Eintrittsbahn mit $\Theta = 5.1$ Grad. Die Werte sind in Einheiten der Erdbeschleunigung g (**G-loading**) angegeben. Bei diesem Typ von Bahnen treten zwei „Eintauchphasen“ auf. Die maximale Bremsung ist hier knapp über $6\,g$.

H[km]	$\Theta[^\circ]$	H[km]	$\Theta[^\circ]$
300	11.20	300	11.09
250	10.05	250	9.92
200	8.72	200	8.58
150	7.14	150	6.96
122	6.07	122	5.86
100	5.06	100	4.80

Tab. 5.2: Der Wiedereintrittswinkel bei einer Parabelbahn bis zur Höhe der Karman-Schicht als Funktion der Flughöhe für eine Perigäumshöhe H_P von 50 km (linke Tabelle) und 55 km (rechte Tabelle). Die NASA legt den offiziellen Eintrittswinkel in einer Höhe von 400000 Fuß (≈ 122 km) fest. Der entsprechende Wert ist hier fett gedruckt.

Der physikalische Vorgang des Eintauchens gleicht bis zu einem gewissen Grad dem Abprall eines platten Kieselsteines von der Wasseroberfläche, wenn der Winkel sehr flach ist. Das scheinbare „Abprallen“ eines ballistischen Flugkörpers von der Erdoberfläche heißt hier natürlich nur der fast ungestörte Weiterflug in einer Parabelbahn oder Ellipsenbahn, weil die Luftbremsung nicht stark genug war, den Körper vollständig

in die Atmosphäre abtauchen zu lassen. Da für Zeiten $t < 0$ vor dem Eintauchen für die Höhe der Raumkapsel als Funktion der Zeit ein geometrischer Zusammenhang gilt, folgt für den Tangens des Eintauchwinkels (Winkel hier positiv angenommen)

$$\Theta_{t \ll 0} \sim \sqrt{\frac{H - H_P}{R}}. \quad (5.93)$$

Die Tabelle (5.2) zeigt typische Werte für den Eintauchwinkel $\tan[\Theta] = \mathbf{P}$ als Funktion der momentanen Höhe H über der Erdoberfläche, wenn die vorgegebene Perigäumshöhe H_P anvisiert wird. Bezieht man sich beim Eintauchen auf das Niveau der sogenannte *Kármán-Linie*, so ergibt sich der kritische Eintauchwinkel in erster Abschätzung zu

$$\Theta \sim \sqrt{\frac{3 H_S}{2 R} \ln \left[\frac{R}{H_S} \right]}. \quad (5.94)$$

Die Formel folgt aus (5.207) und (5.167), wie in einem späteren Kapitel noch gezeigt werden soll. Mit der Skalenhöhe $H_S = \mathbf{8}$ km und $R = \mathbf{6371}$ km ergibt sich so für den kritischen Eintauchwinkel, um von einer Entweichgeschwindigkeit auf eine Kreisbahngeschwindigkeit abzubremesen, der Wert $\Theta \sim \mathbf{6.43^\circ}$ Grad. Diese Zahl ($\approx \mathbf{7^\circ}$) spielte bei allen Apollo-Mondmissionen der 1970er Jahre bei der Rückkehr vom Mond eine wichtige Rolle.

Zum Abschluss wollen wir alternativ auch eine genauere Aussage zur Bahnkurve machen, wenn der Einstieg mit der Entweichgeschwindigkeit $\sqrt{2gR}$ erfolgt. Mit der differentiellen Bogenlänge $ds = v dt$ läßt sich alternativ die Gleichung (5.55) auch als

$$\frac{d\theta}{ds} = - \left(\frac{g}{v^2} - \frac{1}{R} \right) \cos[\theta] \quad (5.95)$$

schreiben. Wir benutzen wieder die Beziehungen

$$\tan[\theta] = y'; \quad \cos[\theta] = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}; \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (5.96)$$

und erhalten für das Geschwindigkeitsquadrat

$$v^2 = g R \frac{1 + y'^2}{1 + y'^2 - R y''}. \quad (5.97)$$

Andererseits machen wir in (5.52) die Substitution

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \{v^2\} = \frac{1}{2\sqrt{1+y'^2}} \frac{d}{dx} \{v^2\} \quad (5.98)$$

und erhalten für v^2 die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \{v^2\} + 2 k_D e^{-y/H_S} \sqrt{1+y'^2} v^2 + 2 g y' = 0. \quad (5.99)$$

Durch Einsetzen von (5.97) in (5.99) ergibt sich eine recht komplizierte Differentialgleichung für $y[x]$, die hier aber nicht explizit aufgeschrieben werden soll.

5.5 Flugdynamik hypersonischer Raumgleiter

Bis jetzt haben wir nicht den Einfluss einer *aerodynamischen Auftriebskraft* auf ein in die Erdatmosphäre eindringendes Flugobjekt berücksichtigt. In der Fig. (5.2) ist ein Beispiel für die Flugbahn eines hypersonischen Raumgleiters dargestellt. Wir wollen die Eigenschaften dieser halb-ballistischen Flugbahn analytisch genauer verstehen. Die Bahn ist nämlich nicht mehr rein ballistisch, sondern wird auch durch aerodynamische Auftriebskräfte bestimmt. Wir benutzen dazu die idealisierten Modellgleichungen (5.18) und (5.19) und schreiben vereinfacht

$$\ddot{x} + k_D[y] v \dot{x} + k_L[y] v \dot{y} = -\frac{\dot{x} \dot{y}}{R}, \quad (5.100)$$

$$\ddot{y} + k_D[y] v \dot{y} - k_L[y] v \dot{x} = +\frac{\dot{x}^2}{R} - g. \quad (5.101)$$

Hier sind $k_D[y]$ (*drag force*) und $k_L[y]$ (*lift force*) die *lokalen aerodynamischen Koeffizienten* um die Referenzbahn in der relativen Höhe $y = 0$. Mit der Skalenhöhe H_S kann man für diese Größen in Abhängigkeit von der Abweichung y

$$k_D[y] \rightarrow k_D e^{-y/H_S}; \quad k_L[y] \rightarrow k_L e^{-y/H_S}. \quad (5.102)$$

schreiben. Die relative Höhe $y = 0$ bezieht sich auf das ungestörte Bahnniveau, $y < 0$ geht in Richtung Erdboden und $y > 0$ entsprechend entgegengesetzt.

Wir wollen jetzt in der y -Gleichung die abhängige Zeitvariable t durch die Raumvariable x ersetzen. Es gilt allgemein

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} \dot{x}, \quad (5.103)$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dx^2} \dot{x}^2 + \frac{dy}{dx} \ddot{x}. \quad (5.104)$$

Mit Hilfe von (5.100) können wir für die letztere Identität (5.104) auch

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dx^2} \dot{x}^2 - k_D[y] v \dot{x} \frac{dy}{dx} - k_L[y] v \dot{x} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{\dot{x}^2}{R} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2. \quad (5.105)$$

schreiben. Wird dies in (5.101) eingesetzt, folgt zunächst

$$\frac{d^2y}{dx^2} \dot{x}^2 - k_L[y] v \dot{x} \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} = \frac{\dot{x}^2}{R} \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} - g. \quad (5.106)$$

Wir machen jetzt weitere Idealisierungen. Da die Gleitkurve bis zum Punkt des Abtauchens in die tiefere Erdatmosphäre sehr flach ist ($y'^2 \ll 1$), wird man sicherlich $v \sim \dot{x}$ annehmen können. Deshalb erhalten wir mit (5.102) schließlich die Modellgleichung für $y \rightarrow y[x]$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - k_L \exp \left[-\frac{y}{H_S} \right] = \frac{1}{R} - \frac{g}{\dot{x}^2}. \quad (5.107)$$

Diese Gleichung führt im Spezialfall $k_L \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$ zur klassischen Wurfparabel zurück.

Im letzten Schritt müssen wir die Größe \dot{x}^2 konsistent in der gleichen Approximation als Funktion von $y[x]$ ausdrücken. Das geschieht durch die Gleichung (5.100) unter Vernachlässigung des Termes proportional k_L . Dann gilt für extreme Flachbahnen $\dot{x} \sim v$

$$\frac{dv}{dx} = -k_D e^{-y[x]/H_S} v \quad (5.108)$$

Die Lösung dieser Gleichung mit der horizontalen Anfangsgeschwindigkeit $v[0] = v_0$ lautet

$$v[x] = v_0 \exp \left[-k_D \int_0^x e^{-y[s]/H_S} ds \right] \quad (5.109)$$

Wird dieser Ausdruck jetzt in (5.107) eingesetzt, ergibt sich die nichtlineare *Integrodifferentialgleichung*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - k_L \exp \left[-\frac{y}{H_S} \right] = \frac{1}{R} - \frac{g}{v_0^2} \exp \left[2 k_D \int_0^x e^{-y[s]/H_S} ds \right] \quad (5.110)$$

für die semi-ballistische Gleitbahn eines hypersonischen Raumkörpers in der oberen Stratosphäre.

Man kann diese Integrodifferentialgleichung in eine äquivalente Differentialgleichung überführen. Dazu schaffen wir den Term $1/R$ auf die linke Seite, dann logarithmieren und differenzieren wir beiden Seiten nach x und erhalten in der Näherung flacher Flugbahnen

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y}{dx^3} - 2 k_D e^{-y/H_S} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{k_L}{H_S} e^{-y/H_S} \frac{dy}{dx} + \\ + 2 \frac{k_D}{R} e^{-y/H_S} + 2 k_D k_L e^{-2y/H_S} = 0. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Die Geschwindigkeit v_0 und die Erdbeschleunigung g sind hier verschwunden, sie stecken jetzt in den Anfangsbedingungen. Eine analytisch exakte Lösung dieser idealisierten Fundamentalgleichung scheint unmöglich und auch nicht wünschenswert. In der folgenden asymptotischen analytischen Betrachtung soll immer $k_D \neq 0$ als auch $k_L \neq 0$ vorausgesetzt werden. Wir wissen aus numerischen Simulationen, dass der Flugkörper bei Geschwindigkeiten knapp unterhalb von $v_0 < \sqrt{gR}$ eine schwach abwärts führende Gleitbahn durchläuft. Da eine Linearisierung um $y = 0$ aufgrund einer abwärts führenden Gleitbahn nicht in Frage kommt, machen wir zunächst die bewährte Substitution

$$y[x] = H_S \ln[F[x]], \quad (5.112)$$

bei der $F[x]$ eine dimensionslose Funktion im Bereich $F > 0$ mit $F[0] = 0$ bezeichnet. Für $F[x]$ gilt dann die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 2 k_D k_L + 2 \frac{k_D}{R} F + k_L F' - 2 H_S k_D F'' + \\ + 2 H_S k_D \frac{F'^2}{F} + 2 H_S \frac{F'^3}{F} - 3 H_S F' F'' + H_S F F''' = 0. \end{aligned}$$

Die ersten drei Terme sind frei von der Skala H_S . Setzen wir ihre Summe gleich Null, so ergibt sich mit der Integrationskonstanten C_1 die Lösung

$$F[x] = C_1 \exp \left[-2 \frac{k_D x}{k_L R} \right] - k_L R. \quad (5.113)$$

Setzt man diese Lösung wieder in die Integrodifferentialgleichung ohne den Term y'' ein, so folgt für die Integrationskonstante C_1 der Ausdruck

$$C_1 = \frac{k_L R}{1 - v_0^2/(gR)}. \quad (5.114)$$

Damit gilt schließlich für die abwärts-führende Flugbahn in der angestrebten Näherung die Gleichung

$$y[x] = H_S \ln \left[k_L R \left(\frac{\exp \left[-2 \frac{k_D x}{k_L R} \right]}{1 - \frac{v_0^2}{gR}} - 1 \right) \right]. \quad (5.115)$$

In dieser Formel können wir nun durch *Umeichung* die Größe k_L auf die Planetenoberfläche beziehen, so dass $y[x]$ jetzt die tatsächliche Höhe über dem Planetenboden beschreibt. Führen wir wieder die Höhen - und Geschwindigkeitsvariable η sowie ζ (siehe 5.27,5.39) gemäß

$$\eta = \exp[-y/H_S], \quad v = v_0 \exp[-\zeta]$$

ein, so gilt anstatt (5.115)

$$\boxed{\eta = \frac{1}{k_L R} \left\{ \frac{g R}{v_0^2} e^{2\zeta} - 1 \right\}}. \quad (5.116)$$

Diese relativ einfache Funktion definiert in unserem idealisierten Modell in *erster Näherung* die semi-ballistische Gleitbahn eines hypersonischen Raumkörpers mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 < \sqrt{gR}$. E. SÄNGER nannte diese Flugbahn die *Gleichgewichtsbahn*. Diese Formel folgt auch als Näherung aus der YAROSHEVSKY Gleichung (5.62).

Wir können mit (5.115) eine Abschätzung zur Reichweite W des Gleitfluges machen. Aus der Forderung, dass die Klammer in (5.115) null wird, erhält man die gute Näherung

$$\varphi_W = \frac{W}{R} = -\frac{1}{2} \frac{k_L}{k_D} \ln \left[1 - \frac{v_0^2}{gR} \right], \quad (5.117)$$

welche innerhalb von etwa 5% sehr gut mit numerischen Simulationen übereinstimmt. Da W längs der Erdoberfläche gemessen wird, ist φ_W der entsprechende Polarwinkel. Die Formel (5.117) ist ein erstes wichtiges

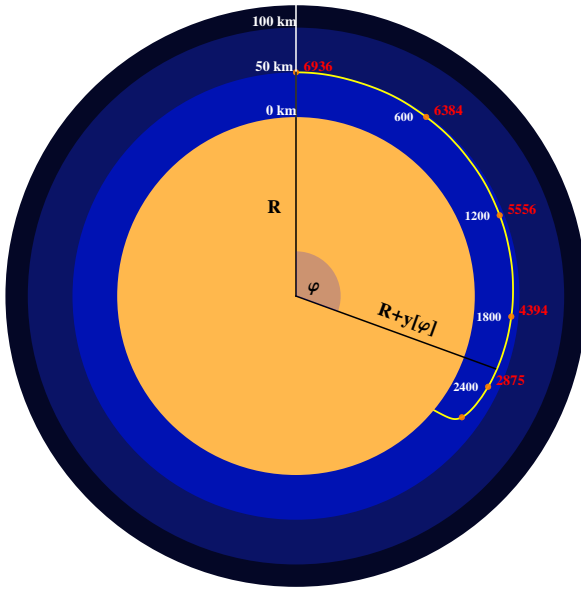


Fig. 5.11: Die Gleichgewichts-Gleitflugbahn für die Parameter $k_D R = 0.1$ und $k_L R = 0.3$, welche mit der Formel (5.115) sehr genau beschrieben werden kann. Da hier $v_0^2 = g R / (1 + k_L R)$ gilt, ist $y[\varphi]$ mit $x = R \varphi$ immer negativ.

Ergebnis zur Theorie hypersonischer Gleiter. Im Geschwindigkeitsbereich über 5 Mach ($v_0 > 5 c_s$) kann nach empirischen Messungen das Verhältnis k_L/k_D nicht wesentlich größer als 4 werden. Bemerkenswert ist zudem, dass die Reichweite des hypersonischen Gleitfluges nur von den *Verhältnissen* v_0/\sqrt{gR} sowie k_L/k_D abhängig ist, nicht aber von ihren *absoluten Werten*. Diese gehen in die Bahnkurve (5.115) ein. Mit Hilfe von (5.109) und (5.115) ist es möglich, auch die Geschwindigkeit als Funktion der horizontalen Flugstrecke x oder des Polarwinkels $\varphi = x/R$ darzustellen. Man erhält

$$\frac{v^2}{gR} = 1 - \left(1 - \frac{v_0^2}{gR}\right) \exp \left[2 \frac{k_D}{k_L} \varphi\right]. \quad (5.118)$$

Damit lässt sich auch die Flugzeit bis zum Ziel mit

$$T = \frac{1}{2} \frac{k_L}{k_D} \sqrt{\frac{R}{g}} \ln \left[\frac{1 + v_0/\sqrt{gR}}{1 - v_0/\sqrt{gR}} \right] \quad (5.119)$$

berechnen. Auch hier hängt die Flugzeit nur von den Verhältnissen der entscheidenden Parameter ab. Für den Gleitwinkel θ erhalten wir dann

$$\tan[\theta] = y'[x] = -2 \frac{k_D}{k_L} \frac{g H_S}{v^2}. \quad (5.120)$$

Man sieht, dass mit abnehmender Geschwindigkeit der nach unten geneigte Gleitwinkel immer weiter zunimmt.

Wir können auch eine grobe Abschätzung über die thermische Belastung des Flugkörpers zu machen. Multiplizieren wir (5.100) mit \dot{x} , (5.101) mit \dot{y} und addieren beide Gleichungen, so ergibt sich für den spezifischen aerodynamischen Energieverlust der Ausdruck

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = -k_D e^{-y/H_S} v^3. \quad (5.121)$$

Wie zu erwarten, hat hier der *Lift*-Parameter k_L keinen direkten Einfluss. Setzt man hier den Ausdruck für $y[x]$ ein und eliminiert die Flugstrecke x durch v , so gilt überraschend einfach

$$\boxed{\frac{d\mathbf{E}}{dt} = -\frac{k_D}{k_L} g v \left(1 - \frac{v^2}{gR} \right)}. \quad (5.122)$$

Aus dieser Beziehung folgt, dass die *maximale thermische Belastung* bei einer Gleitgeschwindigkeit

$$v_E = \sqrt{\frac{gR}{3}} \quad (5.123)$$

auftritt. Ist $v_0 < v_E$, so tritt maximale thermische Belastung sofort bei Beginn der Gleitphase ein. Die Gleitstrecke W_E , bei der diese maximale Belastung auftritt, folgt aus

$$\varphi_E = \frac{W_E}{R} = -\frac{1}{2} \frac{k_L}{k_D} \ln \left[\frac{3}{2} \left(1 - \frac{v_0^2}{gR} \right) \right].$$

Die kritische Höhe H_E maximaler Hitzebelastung liegt dann bei

$$H_E = H_S \ln \left[\frac{k_L R}{2} \right] \equiv H_S \ln \left[\frac{R}{H_S} \right] + H_S \ln[k_L H_S/2].$$

Liegt der Beginn des Gleitfluges genau in dieser Höhe, so sieht man, dass die kritische Belastung schon am Anfang der Bahn stattfindet. Im kritischen Falle $k_L R = 2$ gilt $v_0 = v_E$ und die maximale thermische Belastung tritt wirklich zu Beginn des Gleitfluges auf. Historisch ist noch interessant, dass die Beziehungen (5.117) und (5.118) wohl zum erstenmal im Jahre 1958 in dem NACA-TR-1382 Report: *A Comparative Analysis of the Performance of Long-Range Hypervelocity Vehicles* veröffentlicht wurden ([2]).

Simulationen zeigen, dass die abwärts führende *steuerlose* Flugbahn keine echte monoton fallende Kurve, sondern eine *wellenförmige Gleitbahn* darstellt. Dies wird verständlich, da durch die Abbremsung der Raumkörper in tiefere Luftschichten eindringt und dort die Gleichgewichtsgeschwindigkeit nicht mehr exakt erfüllt ist. Wir wollen für diese charakteristische Wellenstruktur eine genäherte theoretische Beschreibung ableiten. Dazu linearisieren wir die Gleichung (5.111) durch den Ansatz

$$y[x] = H_S \ln \left[k_L R \left(\frac{\exp \left[-2 \frac{k_D x}{k_L R} \right]}{1 - \frac{v_0^2}{gR}} - 1 \right) \right] + \psi[x] + \dots \quad (5.124)$$

und vernachlässigen Quadrate der als klein angenommenen Funktion $\psi[x]$. Einsetzen in (5.111) führt mit einem CAS System auf eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung in $\psi[x]$. Da wir an den Wellenstrukturen dieser Funktion interessiert sind, vernachlässigen wir den Absolutterm und den Term proportional $\psi[x]$ in dieser Gleichung. Im letzten Schritt führen wir die neue unabhängige Variable z gemäß der Transformation

$$z = \left(1 - \frac{v_0^2}{gR} \right) \exp \left[2 \frac{k_D x}{k_L R} \right] \quad (5.125)$$

ein. Im Falle $z = 1$ befindet sich das Flugobjekt im Zielgebiet. Damit erhalten wir für $\psi'[z]$ die lineare Differentialgleichung

$$z^2 (1 - z) \frac{d^3 \psi}{dz^3} + z (3 - 4z) \frac{d^2 \psi}{dz^2} + \left(1 + \left(\frac{k_L^2 R}{4 k_D^2 H_S} - 2 \right) z \right) \frac{d\psi}{dz} = 0. \quad (5.126)$$

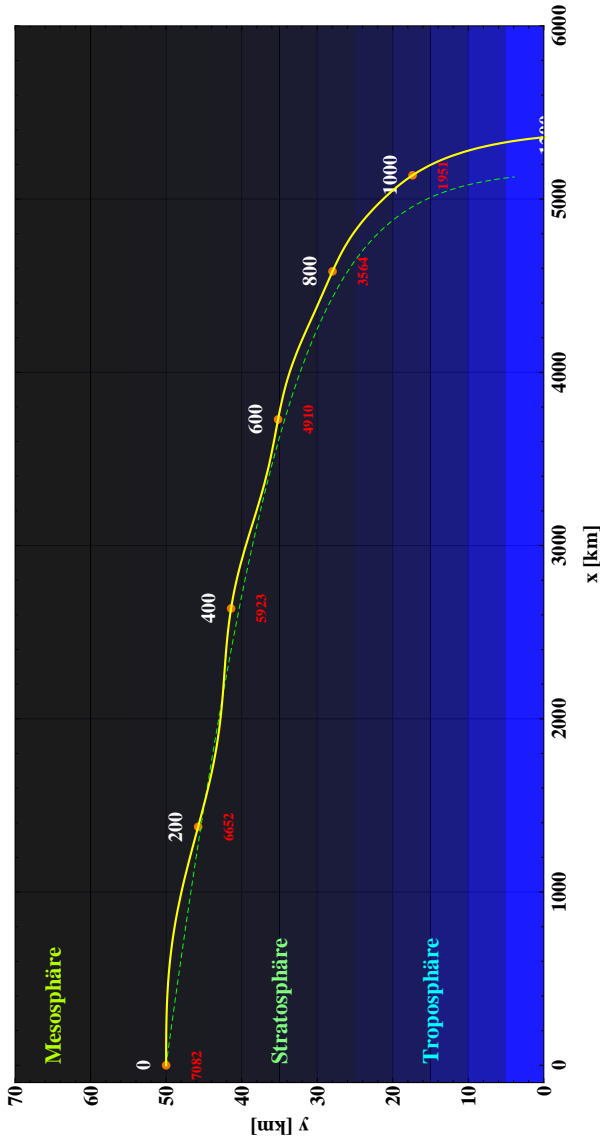


Fig. 5.12: Die Bahn eines hypersonischen antriebslosen Flugkörpers mit den typischen wellenartigen Abwärtsbewegungen (Rikoschett-Flug). Die aerodynamischen Parameter sind hier $k_L R = 0.245$ und es gilt $k_L/k_D = 1$. Die grün gestrichelte Linie entspricht der asymptotischen Lösung (5.115). Weiße Zahlen bedeuten die Zeit in Sekunden, rote Zahlen Geschwindigkeiten in m/s.

Die Lösungen sind Legendrefunktionen der ersten und zweiten Art

$$\psi'[z] = C_1 \frac{\mathbf{P}_\ell[2z-1]}{z} + C_2 \frac{\mathbf{Q}_\ell[2z-1]}{z} \quad (5.127)$$

mit dem Parameter

$$\ell = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{k_L^2}{k_D^2} \frac{R}{H_S}}. \quad (5.128)$$

Die Struktur des wellenförmigen *Rikoschettierens* und dessen Dämpfung wird durch die Legendre-Polynome bzw. Legendrefunktionen schon ausreichend genau beschrieben.

5.6 Satellitenbahnen mit Luftreibung (Aerobraking)

Seit künstliche Satelliten um die Erde fliegen, gibt es das Problem, die Abbremsung von tieffliegenden Satelliten quantitativ abzuschätzen und so Aussagen über ihre Lebensdauer zu machen. Ausgedehnte Atmosphären von Planeten können durch ihre Bremswirkung entweder die exzentrische Bahn einer Sonde immer kreisförmiger machen und so deren ballistische Landung auf dem Planeten vorbereiten (Aerobraking) oder ihn verglühen lassen. Daher wollen wir etwas genauer untersuchen, wie sich der Luftwiderstand insbesondere auf die zeitliche Entwicklung der Ellipsenbahn von Erdsatelliten auswirkt.⁴

Wir modellieren die gestörte Keplerbewegung einer Planetensonde durch die Vektorgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G M \frac{\mathbf{r}}{r^3} - k[r] v \dot{\mathbf{r}}, \quad (5.129)$$

wo G die Gravitationskonstante, M die Masse des Planeten (Erde), \mathbf{r} der Ortsvektor der Sonde und $k[r]$ ein ballistischer Koeffizient bedeuten, der nur vom radialen Abstand r zum Planetenmittelpunkt abhängt. Die

⁴Historisch ist es sehr interessant, dass schon 1797 der preußische Offizier und Astronom J.P. VON ROHDE die Einwirkung von Luftwiderstand auf Keplerbahnen (Kometenbahnen) untersucht hat.([46])

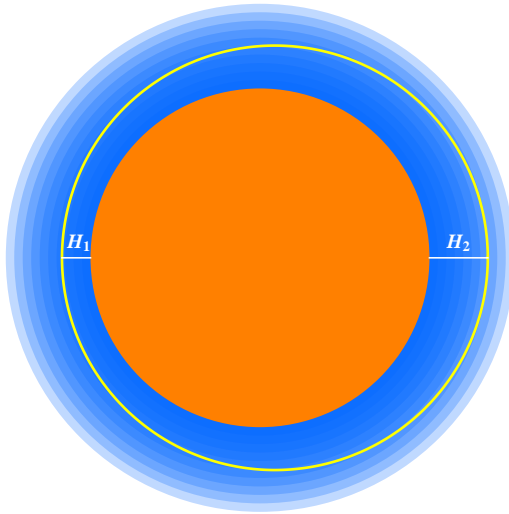


Fig. 5.13: Geometrische Kenngrößen bei der Abbremsung einer Satellitenbahn in den tieferen Atmosphärenschichten eines Planeten (Erde). H_1 bezeichnet die Perigäumshöhe, H_2 die Apogäumshöhe der Satellitenbahn über der Erdoberfläche.

Geschwindigkeit der Sonde ist $v = |\dot{\mathbf{r}}|$. Skalare Multiplikation dieser Gleichung mit $\dot{\mathbf{r}}$ führt auf

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{G M}{r} \right) = -k[r] v^3. \quad (5.130)$$

Eine ähnliche Gleichung hat auch schon VON ROHDE im Jahre 1797 erhalten, um den vermeintlichen Zerfall von Kometenbahnen abzuschätzen. Multiplizieren wir weiter von links die Gleichung (5.129) vektoriell mit \mathbf{r} , so erhalten wir nach einer kleiner Umrechnung

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = -k[r] v (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}). \quad (5.131)$$

Diese Gleichung besagt anschaulich, dass der spezifische Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ der Keplerbahn mit der zeitlichen Rate $k(r) v$ exponentiell zerfällt. Wegen $|\mathbf{L}| = \sqrt{G M p}$, wo p den sogenannten Bahnparameter

$p = a(1 - \epsilon^2)$ der Bahnellipse bezeichnet, erhalten wir so die zweite Variationsgleichung

$$\frac{d}{dt} \ln[p] = -2 k[r] v. \quad (5.132)$$

Sie besagt, dass die große Halbachse der Ellipse mit einer bestimmten Rate immer kleiner wird. Als einfachsten Fall betrachten wir zunächst eine Kreisbahn. Wir machen die Hypothese, dass durch Luftreibung der Radius $r[t]$ dieser kreisförmigen Bahn sich langsam verkleinert und sich so der Satellit immer mehr dem Erdboden nähert. Wir prüfen diese Hypothese anhand der Variationsgleichung (5.132). Bei einer Kreisbahn ist $a \equiv p$ und die Variationsgleichung lautet

$$\frac{d}{dt} \{\ln r[t]\} = -2 k[r] v. \quad (5.133)$$

Später werden wir sehen, dass hier anstatt 2 auch $2/3$ stehen kann. In jedem Falle folgt sofort die säkulare Entwicklungsgleichung für den Radius $r[t]$

$$\dot{r}[t] + 2 k[r] r v = 0. \quad (5.134)$$

Aus der ersten Gleichung können wir schon schließen, dass sich der Bahnradius des tiefliegenden Satelliten immer mehr verkleinert, gleichzeitig aber - *trotz Abbremsung* - die Geschwindigkeit gemäß dem Keplerschen Gesetz immer mehr vergrößert. Die Erfahrung lehrt aber, dass dies nicht immer so weitergehen kann, da irgendwann in den tieferen Luftschichten der Satellit auf aerodynamische Fallgeschwindigkeit abgebremst werden wird. Wir wollen diesen kritischen Übergang hier etwas genauer untersuchen. In den frühen 1960er Jahren konnte man aus der Änderung der gut messbaren Umlaufzeit T_U eines Satelliten auf den ballistischen Koeffizienten $k[r]$ und so auch auf die Luftdichte schließen. Denn es gilt mit den obigen Gleichungen

$$\frac{\dot{T}_U}{T_U} = -3 k[r] v. \quad (5.135)$$

Als sehr einfaches Modell für den ballistischen Koeffizienten nehmen wir wieder die barometrische Höhenformel

$$k[r] = k \exp \left[\frac{R - r}{H_S} \right]. \quad (5.136)$$

Die ballistische Konstante $k \equiv k_D$ (*inverse Länge*; „*drag force*“) gilt jetzt für den Erdboden ($r = R$). Die Skala H_S liegt in der *Troposphäre* der Erde bei etwa 8000 Metern, ist aber in der *Thermosphäre* größer und kann zudem mit der Tageszeit und bei plötzlich ausbrechenden „Sonnenstürmen“ stark schwanken. Da die mittlere freie Weglänge der Moleküle in diesen höheren Schichten mit der Ausdehnung eines Satelliten vergleichbar ist, spielt auch die sogenannte *Knudsen - Zahl* für die Berechnung des Strömungswiderstandes eine Rolle. Aus den obigen Gleichungen folgt dann durch Einsetzen die wichtige radiale Driftgleichung erster Ordnung in k

$$\dot{r} + 2k \sqrt{GM} r \exp \left[\frac{R-r}{H_S} \right] = 0. \quad (5.137)$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$\sqrt{\pi H_S} \mathbf{Erfi} \left[\sqrt{\frac{r}{H_S}} \right] = C - 2k \sqrt{GM} \exp \left[\frac{R}{H_S} \right] t, \quad (5.138)$$

wobei $\mathbf{Erfi}[z]$ die mit $-i$ multiplizierte Fehlerfunktion für rein imaginäres Argument bedeutet. Die Konstante C folgt aus der Randbedingung $r(0) = R + H_0$ mit der Anfangshöhe H_0 . Die asymptotische Lösung dieser Differentialgleichung lautet mit der Anfangshöhe $r(0) = R + H_0$ ($H_0/R \ll 1$)

$$H[t] = H_S \ln \left[\exp \left[\frac{H_0}{H_S} \right] - 2k R \frac{\sqrt{g R} t}{H_S} \right]. \quad (5.139)$$

Durch Einführung der Lebenszeit

$$T_L = \frac{e^{H_0/H_S}}{4\pi k R} \left[\frac{H_S}{R} \right] T_U \quad (5.140)$$

eines Satelliten in Erdnähe ergibt sich für die zeitliche Abnahme der Flughöhe die einfache Beziehung

$$H[t] = H_0 + H_S \ln \left[1 - \frac{t}{T_L} \right]. \quad (5.141)$$

Computersimulationen auf Basis der Gleichung (5.129) zeigen nun, dass die zeitliche Abnahme des Bahnradius einer kreisförmigen Satellitenbahn



Fig. 5.14: Der kontrollierte Absturz des 14 Tonnen schweren ATV-002 Frachters „Johannes Kepler“ von der Internationalen Raumstation im Juni 2011. Da einige Details des Verglühens in der Erdatmosphäre bis heute nicht gut verstanden sind, hatte er einen „Reentry Break-up Recorder“ an Bord. In etwa 80 km Flughöhe brach allerdings der Kontakt ab. (Bild: ESA)

sehr genau der analytischen Formel (5.141) folgt. Auch die Geschwindigkeit nimmt nach dem Keplerschen Gesetz in den tieferen Atmosphärenschichten zunächst weiter zu. Bei einer bestimmten Höhe H_K allerdings erreicht der Satellit kurz vor dem Ende seiner Lebenszeit seine *maximale Orbitalgeschwindigkeit*. Simulationen zeigen jetzt, dass kurz danach die Geschwindigkeit sehr schnell abnimmt und die säkulare Gleichung (5.134) erster Ordnung in k nicht mehr gültig ist. Der Satellit durchläuft eine kurze maximalen Bremsphase und stürzt danach schnell ab. In dieser Endphase maximaler Abbremsung und Energiedissipation findet in den meisten Fällen auch das Verglühen statt.

Bis jetzt haben wir den Abstieg eines Satelliten in einer Kreisbahn behandelt. Die Verhältnisse bei einer Ellipsenbahn sind qualitativ anders. Es gibt jetzt keinen Punkt maximaler Geschwindigkeit mehr, dafür aber beim Abstieg in die Atmosphäre einen Zeitpunkt *minimaler Exzentrizität*. Bezeichnet man jetzt die Perigäumsdistanz mit r_1 , die Apogäumsdistanz mit r_2 , so gilt in der Ellipsengeometrie

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}; \quad p = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad \epsilon = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}. \quad (5.142)$$

Außerdem gelten für den Radius r und die Geschwindigkeit v als Funktion

der wahren Anomalie φ die Beziehungen

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}, \quad v^2 = G M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (5.143)$$

Ist der Winkel φ gleich Null, geht die Sonde durch ihr Perigäum (Erdnähe), ist der Winkel ± 180 Grad, geht sie durch das Apogäum (Erdferne) der Bahn. Mit alledem lassen sich die beiden obigen Variationsgleichungen umschreiben und vereinfachen zu dem äquivalenten Paar

$$\begin{aligned} \frac{\dot{r}_1}{r_1} &= - \frac{k[r] v[r] (1 - \cos[\varphi]) (r_1 + r_2)}{r_2}, \\ \frac{\dot{r}_2}{r_2} &= - \frac{k[r] v[r] (1 + \cos[\varphi]) (r_1 + r_2)}{r_1}. \end{aligned}$$

Diese Formeln dürfen für eine realistische Abschätzung weiter vereinfacht werden. Da der ballistische Koeffizient k (inverse Länge) entlang der Flugbahn aus mehreren Gründen nur unsicher modelliert werden kann, die betrachten Bahnen zudem nicht extrem exzentrisch sind, so dürfen wir in guter Approximation

$$\frac{d}{dt} \ln[r_1[t]] \sim -2 k[\varphi] (1 - \cos[\varphi]) v[\varphi], \quad (5.144)$$

$$\frac{d}{dt} \ln[r_2[t]] \sim -2 k[\varphi] (1 + \cos[\varphi]) v[\varphi] \quad (5.145)$$

schreiben. Schon hier kann man den entscheidenden Mechanismus der Abbremsung (*Aerobraking*) von tieffliegenden Planetensonden sehen. Gerade wenn sich die Sonde im Perigäum der Bahn ($\varphi = 0$) befindet, wo die Luftdichte am höchsten ist, erfährt die Perigäumsdistanz $r_1[t]$ nur eine minimale säkulare Änderung ($1 - \cos(\varphi) \approx 0$), während die Apogäumsdistanz $r_2[t]$ eine maximale Änderung erfährt. Die elliptische Bahn der Sonde wird also durch die Luftreibung zunächst kreisförmiger gemacht, bevor sie in tiefere Atmosphärenschichten abtaucht.

Wir wollen die obigen Entwicklungsgleichungen für den häufig vorkommenden Fall niedrig fliegender Satelliten noch weiter vereinfachen. Wir approximieren die Bewegung der Sonde zwischen den beiden Höhenextrema H_1 (Perigäum) und H_2 (Apogäum) über der Erdoberfläche durch die harmonische Näherung

$$y \sim \frac{1}{2}(H_1 + H_2) + \frac{1}{2}(H_1 - H_2) \cos(\varphi). \quad (5.146)$$

Für die Geschwindigkeit v nahe der Erdoberfläche setzen wir einfach $v = \sqrt{gR}$, wo g die Oberflächenbeschleunigung und R den Erdradius bezeichnen. Variationen dieser Orbitalgeschwindigkeit liegen bei den erdnahen Bahnen in der Größenordnung von $\delta H/R$ und dürfen hier vernachlässigt werden. Auch die Quotienten $\dot{r}_{1,2}/r_{1,2}$ können wir durch die Ausdrücke $\dot{H}_{1,2}/R$ approximieren. Führen wir noch eine Mittlung durch, indem wir über einen vollen Umlauf φ integrieren und durch 2π dividieren, so ergeben sich die merkwürdigen Gleichungen

$$\frac{dH_1}{dt} = -V e^{-\frac{H_1+H_2}{2H_S}} \left(\mathbf{I}_0 \left[\frac{H_2 - H_1}{2H_S} \right] - \mathbf{I}_1 \left[\frac{H_2 - H_1}{2H_S} \right] \right) \quad (5.147)$$

und

$$\frac{dH_2}{dt} = -V e^{-\frac{H_1+H_2}{2H_S}} \left(\mathbf{I}_0 \left[\frac{H_2 - H_1}{2H_S} \right] + \mathbf{I}_1 \left[\frac{H_2 - H_1}{2H_S} \right] \right). \quad (5.148)$$

Die Funktionen $\mathbf{I}_0[z]$ und $\mathbf{I}_1[z]$ bezeichnen modifizierte Besselfunktionen und V bedeutet die Geschwindigkeitskonstante

$$V = 2kR\sqrt{gR}. \quad (5.149)$$

Die obigen Entwicklungsgleichungen beschreiben *in unserem stark idealisierten Modell* die unterschiedlich schnelle Abnahme der Perigäumshöhe und der Apogäumshöhe ($H_1 < H_2$) mit der Zeit. Die einfache Lösung (5.141) legt es nahe, im anderen Extremfall einer stark elliptischen Bahn die modifizierten Besselfunktionen für ein großes Argument asymptotisch zu approximieren. Wir setzen genähert für $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_0[x] + \mathbf{I}_1[x] &\sim \frac{2e^x}{\sqrt{2\pi x}} + \dots \\ \mathbf{I}_0[x] - \mathbf{I}_1[x] &\sim \frac{e^x}{2x\sqrt{2\pi x}} + \dots \end{aligned}$$

Mit diesen Näherungen lauten die Gleichungen (5.147) und (5.148) vereinfacht

$$\frac{dH_1}{dt} \sim -\frac{V}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{H_S}{H_2 - H_1} \right)^{3/2} e^{-\frac{H_1}{H_S}} \quad (5.150)$$

und

$$\frac{dH_2}{dt} \sim -\frac{2V}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{H_S}{H_2 - H_1} \right)^{1/2} e^{-\frac{H_1}{H_S}}. \quad (5.151)$$

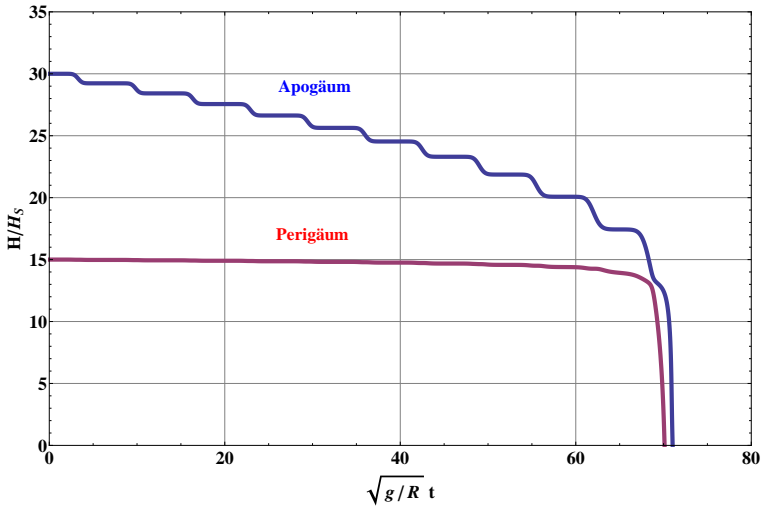


Fig. 5.15: Computersimulation für die Perigäumshöhe (rot) und Apogäumshöhe (blau) einer exzentrischen Satellitenbahn beim Eintauchen in die Erdatmosphäre. Deutlich ist zu sehen, dass die Apogäumshöhe mit der Umlaufzeit „stufenweise“ abgebaut wird, da nur in Perigäumshöhe die Luftreibung besonders effektiv ist. Die Skala H_S wurde hier zu 8 km angenommen.

Aus diesen gekoppelten Gleichungen folgt asymptotisch das Differential

$$\frac{dH_2}{dH_1} \sim 2 \frac{H_2 - H_1}{H_S}.$$

Das Integral dieser Relation ist

$$H_2 - H_1 \sim \frac{H_S}{2} + C_1 \exp\left(2 \frac{H_1}{H_S}\right)$$

C_1 ist hier eine Integrationskonstante, die mit den Anfangsbedingungen festliegt. Da die Beziehung asymptotisch gilt, vernachlässigen wir den kleinen Summanden $H_S/2$ und erhalten die auch physikalisch einsichtige Beziehung

$$H_2 - H_1 \sim (H_{20} - H_{10}) \exp\left(2 \frac{H_1 - H_{10}}{H_S}\right). \quad (5.152)$$

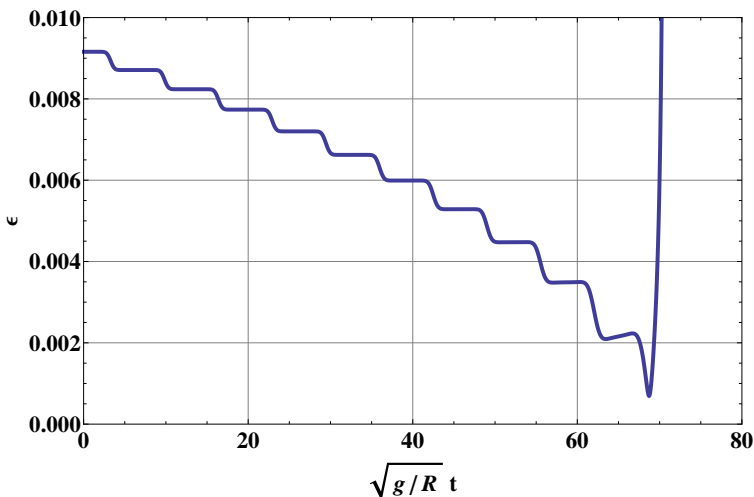


Fig. 5.16: Das stufenweise Abnehmen der Exzentrizität einer erdnahen elliptischen Satellitenbahn in einer Computersimulation. Es existiert kurz vor dem Absturz ein Punkt minimaler Exzentrizität, ab dem die Exzentrizität abrupt dem asymptotischen Grenzwert 1 zustrebt. Gleichzeitig halbiert sich der Wert der großen Halbachse. Die Bahnparameter sind dieselben wie in Fig. (5.15).

Die Größen H_{10} und H_{20} bedeuten die Perigäumshöhe und die Apogäumshöhe zu Beginn der Beobachtung. Die obige Beziehung setzen wir nun in (5.150) ein und erhalten nach Integration für $H_1[t]$ die neue Darstellung

$$H_1[t] \sim H_{10} + \frac{1}{4} H_S \ln \left[1 - \frac{t}{T_L} \right]. \quad (5.153)$$

Wie bei einer reinen Kreisbahn erhalten wir wieder einen analogen zeitlichen Verfall für die Perigäumshöhe, nur ist jetzt die Skalenhöhe asymptotisch auf den vierten Teil reduziert. Dagegen gilt für den zeitlichen Verfall der Apogäumshöhe mit (5.152) und (5.153)

$$H_2[t] - H_1[t] = (H_{20} - H_{10}) \sqrt{1 - \frac{t}{T_L}}. \quad (5.154)$$

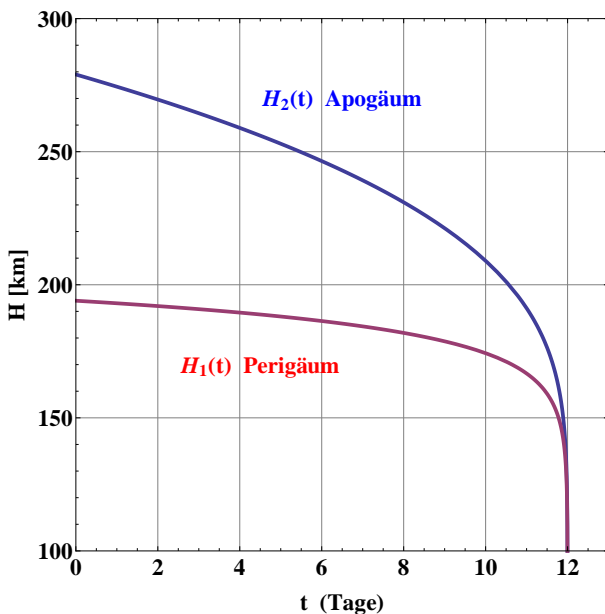


Fig. 5.17: Der Absturz von Progress M-27M im April/Mai 2015 nach einer Fehlfunktion der Trägerrakete. Die Funktionen (5.153) und (5.154) beschreiben die beobachtete Höhenabnahme sehr gut.

Die Lebensdauer T_L muss jetzt aus den gekoppelten Differentialgleichungen (5.147) und (5.148) gewonnen werden. Alternativ ist es auch möglich, aus den abnehmenden Höhendaten des Perigäums und Apogäums durch einen Fit die zwei freien Parameter H_S und T_L in (5.153) und (5.154) zu bestimmen.

In der Figur (5.18) ist der sehr schnelle Zerfall der Bahn des ersten Satelliten *Sputnik 1* mit der Zeit zu sehen. Historisch ist noch interessant, dass man im Oktober 1957 nur die Umlaufzeit des Satelliten genau messen konnte.⁵ Für die Umlaufzeit eines künstlichen Satelliten um die Erde gilt nämlich mit Berücksichtigung der Abnahme der Gravitation mit dem

⁵Dies wurde insbesondere an der Bonner Sternwarte 1957 durch P. LENGGRÜSSER, H.G. BENNEWITZ und W. PRIESTER durchgeführt.

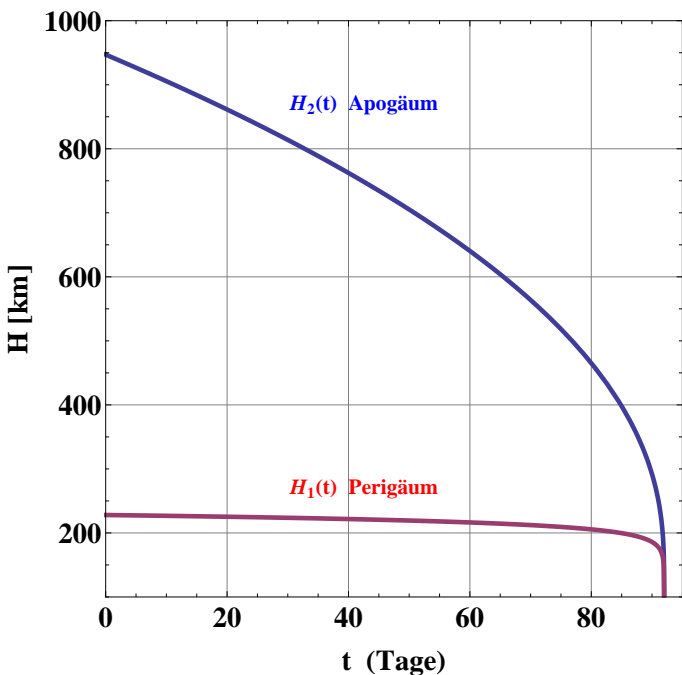


Fig. 5.18: Der dramatische Bahnzerfall von Sputnik 1 vom 4. Oktober 1957 bis zum 4. Januar 1958, dem Tag des Verglühens in der Erdatmosphäre. Berechnet mit den Funktionen (5.153) und (5.154).

Abstand vom Massenzentrum nach KEPLER oder NEWTON

$$T_U = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left(1 + \frac{3}{2} \delta + \frac{3}{8} \delta^2 + \dots \right) \quad (5.155)$$

mit $\delta = (H_1 + H_2)/(2R)$. Aus einer gemessenen Umlaufzeit und einer vom Kosmodrom Baikonur in der damaligen UDSSR angegebenen Apogäumshöhe konnte man damals schnell auf eine mittlere Bahnhöhe von **576** km schließen.

5.7 Theorie der Kármán-Linie

Im letzten Kapitel wurde schon angedeutet, dass ein Satellit in einer erdnahen Kreisbahn durch Luftreibung zwar an Höhe verliert, gleichzeitig aber an Geschwindigkeit gewinnt. Es muss aber eine kritische Höhe geben, bei der mit zunehmender Luftreibung die Gesamtgeschwindigkeit ein Maximum erreicht. Die Phase maximaler Abbremsung und Energiedissipation findet allerdings erst in wesentlich tieferen Atmosphärenschichten statt, wie man anhand der Gleichung (5.74) sehen konnte. Wir wollen hier zunächst diese wichtige kritische Höhe H_K maximaler Orbitalgeschwindigkeit genauer verstehen und analytisch abschätzen. Der ganze Vorgang entspricht zudem einem *ballistischen Wiedereintritt* mit Eintrittswinkel $\Theta \sim 0$. Letztendlich bestimmt diese kritische Höhe die obere Grenze der Erdatmosphäre zum Weltraum.

Modell I : Zunächst benutzen wir einen *konsistenten störungstheoretischen Ansatz*. Dazu formulieren wir die Bewegungsgleichung (5.129) in Polarkoordinaten. Es gilt für die Radialkomponente

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + r \dot{\varphi}^2 - k[r] \dot{r} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} \quad (5.156)$$

sowie für die Azimutalkomponente

$$r \ddot{\varphi} + \left\{ 2 \dot{r} + k[r] r \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} \right\} \dot{\varphi} = 0. \quad (5.157)$$

Wie in der klassischen Ballistik ist es auch hier günstig, die Geschwindigkeitskomponenten v_r und v_t gemäß

$$v_r = \dot{r}; \quad v_t = r \dot{\varphi} \quad (5.158)$$

einzuführen. Die beiden obigen Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{v}_r + \frac{GM}{r^2} - \frac{v_t^2}{r} + k[r] \sqrt{v_r^2 + v_t^2} v_r = 0 \quad (5.159)$$

und

$$\dot{v}_t + \frac{v_r v_t}{r} + k[r] \sqrt{v_r^2 + v_t^2} v_t = 0. \quad (5.160)$$

Zu beachten ist hier, dass der Faktor 2 in (5.157) in der Gleichung (5.160) vor dem Term $v_r v_t/r$ nicht mehr auftritt. Beim spiralförmigen Abstieg

wird zu Beginn sicherlich $v_r \ll v_t$ gelten. Da die Bahn monoton abfallend ist, können wir analog wie im *Allen - Eggers Modell* die Ableitung nach der Zeit durch die Ableitung nach dem Radius r ersetzen. Mit den Abkürzungen

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_t^2}$$

und

$$\frac{d}{dt} = v_r \frac{d}{dr} \quad (5.161)$$

folgen so die Differentialgleichungen ($v_r \ll v_t$)

$$v_r \frac{dv_r}{dr} + \frac{G M}{r^2} - \frac{v_t^2}{r} + k e^{(R-r)/H_S} v v_r = 0 \quad (5.162)$$

und

$$v_r \frac{dv_t}{dr} + \frac{v_r v_t}{r} + k e^{(R-r)/H_S} v v_t = 0. \quad (5.163)$$

Hier muss betont werden, dass ab jetzt r eine **radiale Polarkoordinate** darstellt und nicht mehr den zeitlich veränderlichen Ortsradius eines Flugkörpers bezeichnet. Die Gleichungen haben jetzt den Charakter von hydrodynamischen Feldgleichungen für das Geschwindigkeitsfeld v_r, v_t .

Wir lösen diese beiden gekoppelten Gleichungen mit einer Störentwicklung der Form

$$\begin{aligned} v_r &= k f_1[r] + k^3 f_3[r] + \dots; \\ v_t &= \sqrt{\frac{G M}{r}} + k^2 f_2[r] + k^4 f_4[r] + \dots \end{aligned}$$

Wir nehmen dabei an, dass in (5.163) im asymptotischen Limes $r \rightarrow \infty$ für v_t die Lösung $\sqrt{G M / r}$ gilt. Wir erhalten bis zur dritten Ordnung die Störfunktionen

$$\begin{aligned} f_1[r] &= -2 \sqrt{G M} r^{1/2} e^{(R-r)/H_S}, \\ f_2[r] &= -2 \sqrt{G M} r^{3/2} e^{2(R-r)/H_S} \frac{r}{H_S}, \\ f_3[r] &= -4 \sqrt{G M} r^{5/2} e^{3(R-r)/H_S} \left(1 + 5 \frac{r}{H_S} - 4 \frac{r^2}{H_S^2} \right). \end{aligned}$$

In erster Ordnung k erhalten wir so für die radiale Driftgeschwindigkeit

$$v_r = -2k \sqrt{GM} r^{1/2} e^{(R-r)/H_S},$$

ein Ergebnis, wie wir es schon früher (5.137) durch eine energetische Betrachtung gewonnen hatten. Für die tangentielle Geschwindigkeit v_t ergibt sich analog in zweiter Ordnung in k

$$v_t = \sqrt{\frac{GM}{r}} \left(1 - 2k^2 H_S^2 \left(\frac{r}{H_S} \right)^3 \exp \left[2 \frac{R-r}{H_S} \right] + \dots \right). \quad (5.164)$$

Die Abnahme der tangentialen Geschwindigkeit ist somit ein Effekt zweiter Ordnung in k . Das Quadrat der Gesamtgeschwindigkeit v^2 ergibt sich in dieser Näherung identisch mit v_t^2 . Diese Störungsentwicklung ist aber nur *semikonvergent*. Man kann aber zumindest über die analytische Form des Maximums eine Aussage machen. Differenzieren wir v_t nach r und setzen die Ableitung Null, so erhalten wir für die kritische Höhe $r \equiv r_K$ maximaler Geschwindigkeit die Gleichung

$$H_S = \sqrt{8} k r_K^2 \exp \left[\frac{R - r_K}{H_S} \right]. \quad (5.165)$$

Auflösen nach r führt mit der Lambertschen Funktion mit dem Zweig \mathbf{W}_{-1} auf den Ausdruck

$$r_K = -2 H_S \mathbf{W}_{-1} \left[-2^{-7/4} \sqrt{\frac{e^{R/H_S}}{k H_S}} \right] \quad (5.166)$$

Aus der obigen Formel folgt mit einer asymptotischen Formel der Lambertschen Funktion, dass die kritische Höhe maximaler Geschwindigkeit recht gut die halb-empirische Formel

$$\boxed{H_K \approx 2 H_S \ln \left[\frac{R}{H_S} \right] + H_S \ln [\mathbf{c}_K k H_S]} \quad (5.167)$$

dargestellt wird. Der numerische Parameter liegt bei etwa $\mathbf{c}_K \sim \mathbf{0.795}$. Ausgedehnte Computersimulationen mit den Gleichungen (5.162) und (5.163) zeigen, dass die obige Formel (5.167) mit den numerischen Werten recht gut übereinstimmt. Wie man sieht, hängt die kritische Höhe H_K

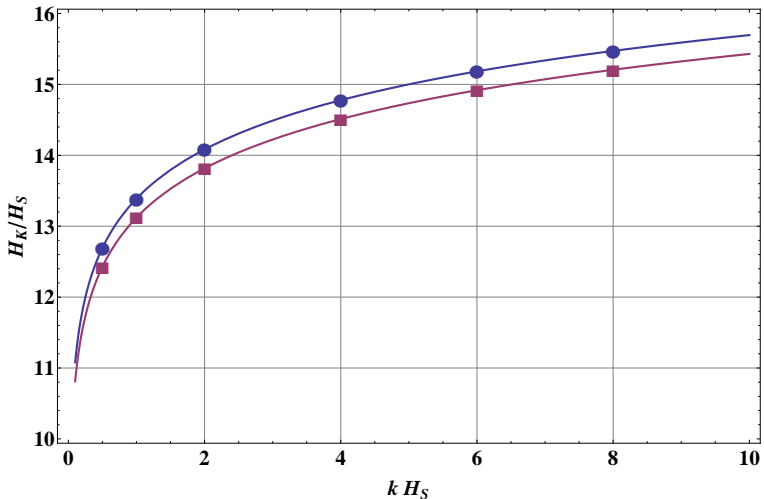


Fig. 5.19: Vergleich von numerischen Simulationen (Markierungen) mit der analytischen Formel (5.167) für die kritische Höhe H_K , bei der die Orbitalgeschwindigkeit eines Satelliten bei einer kreisförmigen Bahn maximal wird. Die obere Kurve entspricht $H_S = 7$ km und die untere $H_S = 8$ km. Für den Erdradius wurde dabei $R = 6371$ km genommen.

nur vom ballistischen Parameter k , dem Erdradius R und der Skalenhöhe H_S der Atmosphäre ab. Die Formel erinnert an das ALLEN-EGGERS Modell. Der Hauptteil der obigen Formel, der nicht vom ballistischen Koeffizienten k abhängt, ist mit $R = \mathbf{6371}$ km und $H_S = \mathbf{8}$ km von der Größenordnung

$$2 H_S \ln \left[\frac{R}{H_S} \right] \sim \mathbf{107} \text{ km} \quad (\text{Erde}). \quad (5.168)$$

In dieser Höhe, die hier nur vom Radius R des Planeten und der Skalenhöhe H_S seiner Atmosphäre abhängt, befindet sich die sogenannte **Kármán-Linie**, die in den 1950er Jahren als gedachte Grenze der oberen Erdatmosphäre von der *Fédération Aéronautique Internationale* nach einem Vorschlag von T. v. KÁRMÁN bei 100 km festgelegt wurde⁶. Die

⁶THEODORE VON KÁRMÁN (1881 - 1963) war ein ungarisch-amerikanischer Physiker und Luftfahrttechniker. Er gilt als Pionier der modernen Aerodynamik und der

Abschätzung für die Marsatmosphäre liefert übrigens bei der Kármán-Linie mit $R = \mathbf{3390}$ km und $H_S = \mathbf{11}$ km den überraschend hohen Wert

$$2 H_S \ln \left[\frac{R}{H_S} \right] \sim \mathbf{126} \text{ km} \quad (Mars). \quad (5.169)$$

Multiplizieren wir schließlich (5.162) mit v_r , (5.163) mit v_t und addieren beide Gleichungen, so erhalten wir mit $\mathbf{v}^2 = v_r^2 + v_t^2$

$$v_r \frac{d|\mathbf{v}|}{dr} + \frac{G M}{r^2} v_r + k[r] |\mathbf{v}|^3 = 0. \quad (5.170)$$

Am Abstiegsunkt maximaler Geschwindigkeit gilt dann die spezifische Energiebilanz

$$\frac{G M}{r_K^2} v_r + k[r_K] |\mathbf{v}|^3 = 0. \quad (5.171)$$

Am Umkehrpunkt ist also die zeitliche Abnahme der spezifischen Gravitationsenergie gleich dem dissipativen Energieverlust durch Luftreibung. Die radiale Sinkgeschwindigkeit ist dann auf den halben theoretischen Wert von (5.137) gesunken. Die gleiche Bilanz gilt später bei einer konstanten Sinkgeschwindigkeit von $\sqrt{g/k}$ auch in den unteren Atmosphärenschichten .

Modell II : Alternativ könnte man die kritische Höhe H_K , unterhalb derer der Lufozean der Erde aerodynamisch wirksam wird, auch mit der Gleichung (5.12) genähert abschätzen. Denn für den Geschwindigkeitsverlauf gilt bei Vernachlässigung der Höhenabhängigkeit von g

$$v \dot{v} = -k_D \exp[-y/H_S] v^3 - g \dot{y}. \quad (5.172)$$

Eliminieren wir wieder mit der Kettenregel die Zeitableitung durch eine Ableitung nach y , so gilt im Falle sehr kleiner θ

$$v \frac{dv}{dy} = -k_D v^2 \frac{e^{-y/H_S}}{\theta} - g. \quad (5.173)$$

Luftfahrt- und Raketenforschung. In der Liste der damaligen Kommission tauchen auch Namen wie W. von Braun, E. Eula, V.N. Sokolsky, B. Genty und R.B. Dillaway auf.

Dies wäre die idealisierte Modellgleichung für die Geschwindigkeitsänderung beim spiralförmigen ballistischen Abstieg einer Raumkapsel aus einer Erdumlaufbahn. Die Abnahme der Gravitation mit der Höhe spielt hier nur eine untergeordnete Rolle. Aus der Forderung $dv/dy \equiv 0$ folgt die notwendige und hinreichende Bedingung für die kritische Höhe H_K

$$\boxed{g \theta_K = -k_D v^2 e^{-\frac{H_K}{H_S}},} \quad (5.174)$$

welche mit der Bedingung (5.171) äquivalent ist. Um diese Bedingung weiter auszuwerten, benutzen wir die Funktion \mathbf{Y} von YAROSHEVSKY. Mit (5.57, 5.65) und (5.66) erhalten wir so die transzendente Gleichung

$$\frac{H_S}{R} \mathbf{Y}'[\zeta_K] = e^{-2\zeta_K} \mathbf{Y}[\zeta_K] \quad (5.175)$$

für die kritische Zahl ζ_K . Ist diese bekannt, so folgt die kritische Höhe nach (5.67) zu

$$H_K = \frac{1}{2} H_S \ln \left[\frac{R}{H_S} \right] + H_S \ln \left[\frac{k_D H_S}{\mathbf{Y}[\zeta_K]} \right]. \quad (5.176)$$

Mit der ausreichenden Näherung (5.68) folgt aus der obigen transzendenten Gleichung

$$\zeta_K \approx \frac{3}{2} \frac{H_S}{R}, \quad \mathbf{Y}[\zeta_K] \approx 3 \left(\frac{H_S}{R} \right)^{3/2}.$$

Damit erhalten wir mit (5.176) für die kritische Höhe der KÁRMÁNlinie wieder den Ausdruck

$$\boxed{H_K = 2 H_S \ln \left[\frac{R}{H_S} \right] + H_S \ln \left[\frac{1}{3} k_D H_S \right].} \quad (5.177)$$

Wie man im Vergleich mit (5.167) sieht, wird der erste Term im vollem Umfang bestätigt, während der zweite einen etwas zu kleinen Parameter $c_k \sim 1/3$ aufweist.



Fig. 5.20: Das heftige Aufglühen und explosive Verdampfen des Riesenboliden am 15. Februar 2013 über dem Südural, gefilmt mit einer Autokamera in Kamensk - Uralski, etwa 200 km nördlich von Tscheljabinsk. Ein etwa zehnfach an Masse größerer Superbolide in einer steileren Bahn war wahrscheinlich die Ursache für das Tunguska - Ereigniss am 30. Juni 1908 in Sibirien in der Nähe des Flusses „Steinige Tunguska“ (Podkamennaja Tunguska) in der heutigen Region Krasnojarsk. (credit: Aleksandr Ivanov; wikimedia.commons)

5.8 Das Tscheljabinsk und Tunguska Ereignis

Die Ergebnisse des vorhergehenden Kapitels lassen sich auf ein Naturphänomen anwenden, welches am 15. Februar im Südural zu beobachten war: *Das Eindringen eines Riesenboliden in die Erdatmosphäre und sein explosives Verglühen.* Neben der Dynamik spielt nämlich auch noch die Energiedissipation bei der Abbremsung eine wichtige Rolle. Dieser Vorgang führt sofort zu einer *starken Erhitzung* des Körpers und kann ihn unter Umständen zerstören oder auflösen. Dies konnte man sehr schön beim Eintauchen eines „Riesenboliden“ am 15. Februar 2013 im Südural bei der Millionenstadt *Tscheljabinsk* beobachten. Es gilt

$$\dot{\mathbf{E}} = -k m e^{-y/H_S} v[t]^3. \quad (5.178)$$

Durch Ersetzen von $v[t] \rightarrow v[y]$ folgt im Falle $k H_S \ll 1$

$$\dot{\mathbf{E}} = -k m v_0^3 \exp \left[-3 \frac{k H_S}{\sin[\Theta]} e^{-y/H_S} - y/H_S \right]. \quad (5.179)$$

Der Betrag dieser Energiedissipation wird gemäß dieser Beziehung maximal in der Höhe

$$y_E = H_S \ln \left[\frac{3 k H_S}{\sin[\Theta]} \right] \quad (5.180)$$

Die Höhenregion maximaler Energiedissipation liegt immer oberhalb der Region maximaler Abbremsung, wie man durch Vergleich mit (5.31) feststellen kann. Die Eintrittsgeschwindigkeit ist dann erst auf den Wert ($k H_S \ll 1$)

$$\mathbf{v}_E = v_0 e^{-1/3} \approx \mathbf{0.72} v_0 \quad (5.181)$$

gesunken. Letztendlich erklärt dieses Ergebnis, dass große Boliden (Meteore), die in die oberen Atmosphärenschichten eintauchen, zunächst *hell aufleuchten* und erst dann durch starke mechanische Beanspruchung (Abbremsung) zerbrechen. Die maximale Energiedissipation beträgt ($\Theta < 0$)

$$\dot{\mathbf{E}}_{max} = \frac{m v_0^3}{3 e H_S} \sin[\Theta] \quad (5.182)$$

und ist wieder unabhängig vom ballistischen Koeffizienten k . Wir können die obige Formel benutzen, um die Energieleistung des *Tscheljabinsk - Boliden* abzuschätzen. Wir entnehmen aus der Literatur (Internet) die Daten⁷

$$m \approx \mathbf{10^7} \text{ kg}; \quad v_0 \approx \mathbf{2.0 \cdot 10^4} \text{ m/s} \quad (5.183)$$

sowie

$$\Theta \approx \mathbf{18^\circ}; \quad H_S \approx \mathbf{8 \cdot 10^3} \text{ m}. \quad (5.184)$$

Für die kinetische Energie ergibt sich so zunächst der Wert

$$\mathbf{E}_{kin} \approx \mathbf{2.0 \cdot 10^{15}} \text{ [J]}. \quad (5.185)$$

Mit dem TNT-Äquivalent von $1 \text{ kg [TNT]} = 4.184 \cdot 10^6 \text{ [J]}$ oder $1 \text{ [kT]} \equiv 4.184 \cdot 10^{12} \text{ [J]}$ entspricht dies aufgerundet dem Wert

$$\mathbf{E}_{kin} \approx \mathbf{500 [kT]} \text{ (Kilotonnen TNT)} \quad (5.186)$$

Die maximale Energieproduktion (Energieleistung) des Riesenmeteoros

⁷Der „steinige“ Riesenbolide von Tunguska soll zehnfache Masse, einen Eintauchwinkel von etwa $\Theta \sim 45^\circ$ und eine Airburst - Höhe von zirka 5 – 10 km gehabt haben ([13]).

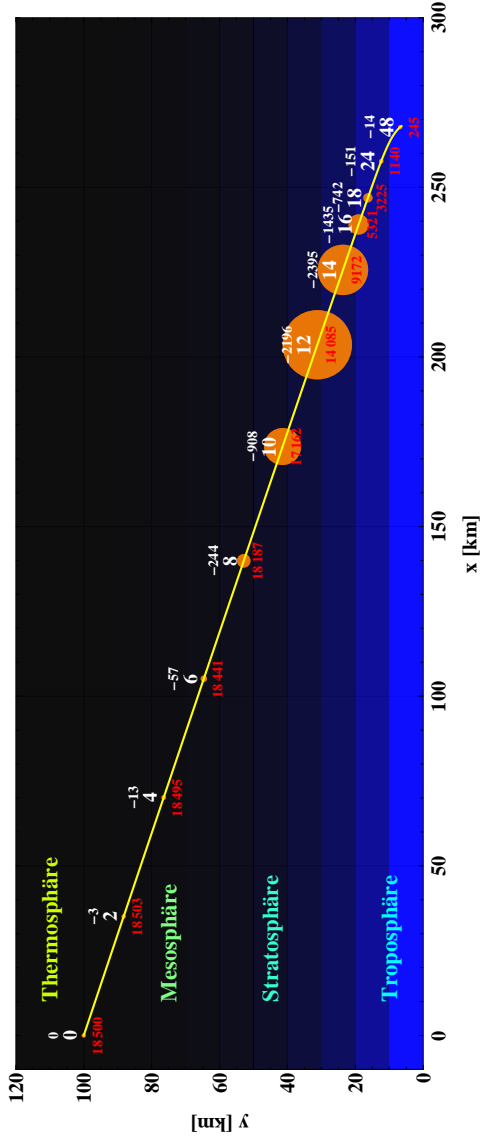


Fig. 5.21: Die Bahn des Riesenboliden am 15. Februar 2013 über dem Südrural - ein gefährliches Naturschauspiel der hypersonischen Ballistik. Die Skalen sind in Einheiten von Kilometern. Der Winkel Θ wird hier zu -18° und die maximale Energieleistung bei einer Höhe y_E von 30 km angenommen. In der Graphik bedeuten die unteren weißen Zahlen Zeiten in Sekunden, die weißen Zahlen darüber die Bremsbeschleunigung in m/s^2 , die roten Zahlen darunter die Geschwindigkeit in m/s . Die Dicke der Kreisseiben ist mit der Größe der Energiedissipation dE/dt skaliert (siehe 5.179). 20%-25% wird davon auch in Photonen - Strahlung umgesetzt. Angeblich haben Augenzeugen von leichten Hautreizungen berichtet (UV - Strahlung).

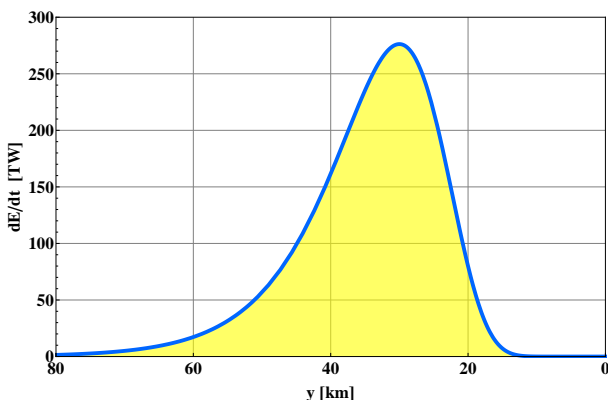


Fig. 5.22: Die Energieleistung des Riesenboliden am 15. Februar 2013 über dem Südrural in Einheiten von **Terra-Watt** als Funktion der Höhe y (siehe 5.179). Der effektive ballistische Koeffizient k_{eff} wurde aufgrund der Beobachtungen bestimmt, nach denen bei der Höhe $y \equiv 30$ km ein Maximum der Helligkeit festgestellt wurde.

betrug

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{E}}| &\approx 3.0 \cdot 10^{14} [W] \\ &\approx 300 [TW] \end{aligned} \quad (5.187)$$

Dies entspricht etwa dem 5-fachen der Leistung, welche die Erde als Wärme aus Erdmantel und Erdkern ständig abgibt. Oder es entspricht über dem 10-fachen, welches die gesamte technische Zivilisation permanent an Leistung benötigt.

Um den Verlauf in der Fig. (5.22) zu erhalten, muss der effektive ballistische Koeffizient k_{eff} im *hypersonischen Bereich* bekannt sein. Dies geschah mit der Formel (5.180) mit der Information, daß in einer Höhe von etwa 30 km die größte Helligkeit (Lichtblitz) und somit höchste Energieumwandlung stattfand. Die Abschätzung liefert

$$k_{eff} \approx 5.5 \cdot 10^{-4} [m^{-1}] \quad (5.188)$$

Mit der Abschätzung

$$k_{eff} \approx \frac{3}{4} c_w \frac{\varrho_L}{\varrho_{Ch}} \frac{1}{D_{eff}} \quad (5.189)$$

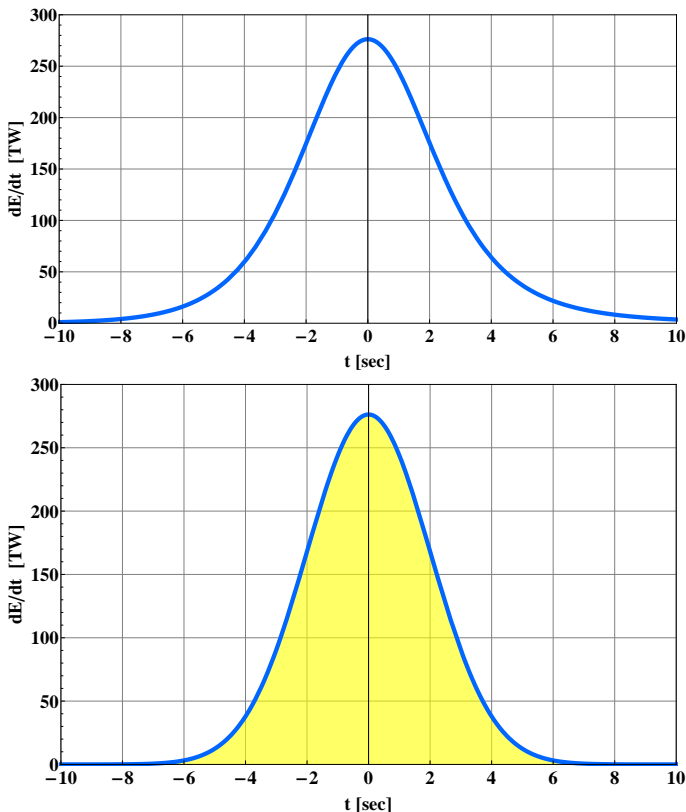


Fig. 5.23: Das obere Bild zeigt den zeitlichen Verlauf der Energiedissipation des Boliden von Tscheljabinsk um den „Airburst“ Zeitmoment $t = 0$. Berechnet mit den Formeln (5.179) und (5.193). Das untere Bild wurde mit der genäherten „Glockenkurve“ (5.194) berechnet.

für kugelförmige Körper ergibt sich mit der Luftdichte $\varrho_L = 1.21 \text{ kg/m}^3$, mit der Dichte für Chondrite von $\varrho_{Ch} = 3300 \text{ kg/m}^3$ und $c_w(\mathcal{M}, \text{Re}) \approx 2$ ein grober Durchmesser von etwa

$$D_{eff} \approx 1.0 \text{ m} \quad (5.190)$$

Der Bolide muss also während des *Airbursts* („Luftexplosion“) in 30 km Höhe schon in zahlreiche Brocken im Meterbereich zerfallen sein -

damit die obigen dynamischen Formeln konsistent sind. Das durch die Hitze induzierte Zerplatzen des Körpers erhöht auch schlagartig den ballistischen Koeffizienten. Denn zerfällt der Bolide in N etwa gleich große Teile, so erhöht sich dieser Koeffizient für jedes Teilstück in

$$k_{eff} \sim k_0 N^{1/3}. \quad (5.191)$$

Es bleibt noch das Problem, den zeitlichen Verlauf des Wiedereintritts mit der Energieproduktion zu verknüpfen. Wegen (5.29) gilt

$$\dot{y}[t] = -v_0 \sin[\Theta] \exp \left[-\frac{k H_S e^{-y[t]/H_S}}{\sin[\Theta]} \right]. \quad (5.192)$$

Durch Integration und Eichung der Zeitskala bei $y = y_E$ zu $t[y_E] = 0$ ergibt sich

$$t[y] = \frac{H_S}{v_0 \sin[\Theta]} \left\{ \mathbf{Ei} \left[-\frac{k H_S e^{-y/H_S}}{\sin[\Theta]} \right] - \mathbf{Ei} \left[\frac{1}{3} \right] \right\} \quad (5.193)$$

Die Funktion $\mathbf{Ei}[z]$ bezeichnet wieder das Exponentialintegral. In der Umgebung von $y = y_E$ können wir durch eine Taylorentwicklung in den beiden Formeln (5.179) und (5.193) die Höhe y in erster Ordnung eliminieren und erhalten so in guter Näherung

$$\boxed{\frac{d\mathbf{E}}{dt} \sim \frac{m v_0^3 \sin[\Theta]}{3 e H_S} \exp \left[-\frac{v_0^2 \sin[\Theta]^2}{2 e^{2/3} H_S^2} t^2 \right]} \quad (5.194)$$

Hier sieht man sehr schön, daß nicht nur das Maximum, sondern auch der zeitliche Verlauf um das Maximum der Energieleistung in sehr guter Näherung unabhängig von dem ballistischen Koeffizienten k ist. Ein Vergleich der Figuren in (5.23) zeigt zudem, daß die Funktion (5.194) eine ausreichende zeitliche Beschreibung der Energieumwandlung liefert.

Mit den Ergebnissen wird man eigentlich unmittelbar zu einem noch größeren Phänomen geführt, dass sich am 30. Juni 1908 im fernen Sibirien zugetragen hat. Dort müssen eine oder mehrere gewaltige Explosionen stattgefunden haben, die auf einer Fläche von 2000 Quadratkilometern circa 60 Millionen Bäume wie Streichhölzer umgeworfen haben. Nur in einem zentralen Gebiet blieben die Bäume wie Telegrafmasten stehen, aber all ihrer Äste beraubt. Die wahrscheinlichste Deutung ist hier wohl

das Eindringen eines *Steinmeteoriten* beträchtlicher Größe in die Erdatmosphäre. Dabei wurde die Luft und der Bolide extrem großen Drücken und Temperaturen ausgesetzt, die schließlich zu seinem Zerschellen und explosivem Verdampfen führte. Der Eintrittswinkel war wahrscheinlich steiler als bei dem *Tscheljabinsk* Boliden und die „Luftexplosion“ fand wohl nur in 5-10 km Höhe statt.

In der Hydrodynamik gibt es ein einfaches Modell, welches die Ausbreitung der äußeren Hülle einer kugelförmigen adiabatischen Schockwelle beschreibt. Das Expansionsgesetz für den Radius $R[t]$ lautet

$$R[t] = \left(\frac{\mathbf{E}_0 t^2}{\kappa[\gamma] \varrho_0} \right)^{1/5}. \quad (5.195)$$

Die Größe \mathbf{E}_0 ist die Energie, die bei der Explosion freigesetzt wird, ϱ_0 die Dichte der ungestörten Atmosphäre und t die Zeit, die nach der Explosion verstrichen ist. Das Gesetz wurde in den 1940er Jahren von J. VON NEUMANN (1903-1957), L. I. SELDOV (1907-1999) und G.I. TAYLOR (1886-1975) hergeleitet und diskutiert. Die Konstante κ ist vom Adiabatenindex γ abhängig. Für diese Zahl gibt es eine Integraldarstellung, die durch drei Appellsche \mathbf{F}_1 Funktionen gelöst werden kann. Für $\gamma = 7/5$ (trockene Luft) erhält man $\kappa[7/5] = \mathbf{0.85107185}...$

Wird die obige Gleichung nach t differenziert, so folgt aus beiden Beziehungen die Relation

$$\dot{R}[t] = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{\mathbf{E}_0}{\kappa[\gamma] \varrho_0 R^3}}. \quad (5.196)$$

Damit läßt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit \dot{R} der Stoßwelle mit der Entfernung R vom Explosionszentrum sehr einfach abschätzen. Das Dichteverhältnis direkt hinter der Schockwelle verhält sich zur ungestörten Dichte vor der Schockwelle nach den *Hugoniot-Bedingungen* wie

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (5.197)$$

Die Verdichtung beträgt für $\gamma = 7/5$ bei sechs.

Nach der Grafik (5.24) ist es wahrscheinlich, dass die Energie der *Tunguska-Explosion* sicherlich bei **8** oder Megatonnen TNT gelegen haben muss. Denn nur so läßt sich das Zerbersten von Fensterscheiben in 60 km

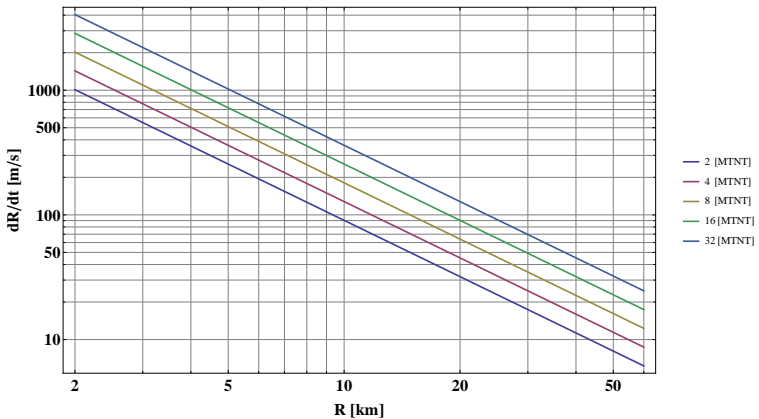


Fig. 5.24: Ein einfaches Modell zur Abschätzung der Windgeschwindigkeiten während des kurzen „Schockes“ nach einer „Punktexplosion“ ist die point source solution einer homogenen Atmosphäre ohne Gravitationsbeschleunigung und Dichteabnahme längs der Höhe.

Entfernung vom Epizentrum erklären. Es gab wohl mehrere Explosionen und auch die Hitze muss noch in 50 km Entfernung erheblich gewesen sein. Die im Epizentrum von oben kommende heiß - verdichtete Stoßwelle kann so auch die Existenz von „Telegraphenmasten“ (stehengebliebene Baumstämme ohne Äste) erklären, welche weiter außen bis 20 km Radius von einem fast radialsymmetrischen Muster umgeworfener Baumstämme umsäumt ist oder war.

5.9 Ein fly by Modell

Wir wollen mit Hilfe eines modifizierten ALLEN-EGGERS Modelles die Geschwindigkeitsänderung eines *Boliden* abschätzen, der in einer geraden Bahn die Oberfläche eines Planeten in der nächsten Annäherung H_P streift. Bekannt ist hier der Bolide vom 10. August 1972 über dem Bundesstaat Utah, der bei Tageslicht sichtbar war und bis auf etwa 53 km Höhe in die Erdatmosphäre eindrang und anschließend wieder verschwand. Die Situation ist in Fig. (5.25) dargestellt. Die wichtigste Krafteinwirkung ist hier wieder die Luftreibung; die Gravitation ist bei

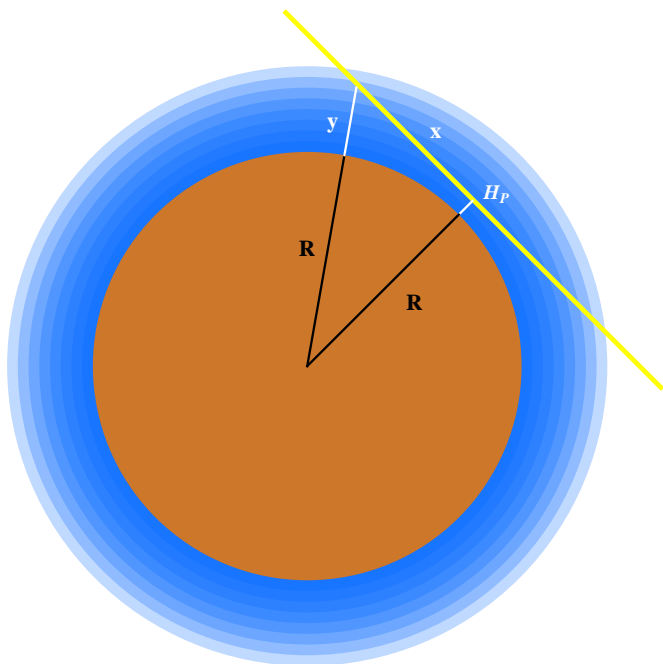


Fig. 5.25: Ein einfaches Modell zur Abschätzung der Abbremsung eines Boliden beim Vorbeiflug durch die oberen Atmosphärenschichten eines Planeten („Earth-grazing fireball“). Der Einfluss der Gravitation wird dabei vernachlässigt. Aus jüngster Zeit ist hier der Feuerball „Grand-Teton-Meteor“ aus dem Jahre 1972 bekannt geworden.

einer hohen Eintrittsgeschwindigkeit nur von sekundärer Bedeutung. Die entscheidende Differentialgleichung ist wieder (5.24). Hier lautet sie jetzt

$$\frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} + k e^{-y/H_S} v^2 = 0. \quad (5.198)$$

Die Koordinate x wird längs der zurückgelegten Bahn gemessen, wobei $x = 0$ der Punkt der nächsten Annäherung in der Höhe H_P über der Planetenoberfläche bezeichnet. Wegen $v = dx/dt$ vereinfacht sich die

obige Gleichung in

$$\frac{dv}{dx} + k e^{-y/H_S} v = 0. \quad (5.199)$$

Um diese Gleichung zu integrieren, benötigen wir noch die Beziehung zwischen der Höhe y über Grund und der Bahnposition x . Nach Pythagoras gilt

$$(R + H_P)^2 + x^2 = (R + y)^2. \quad (5.200)$$

Auflösen nach y führt auf den Zweig

$$y = -R + \sqrt{(R + H_P)^2 + x^2}. \quad (5.201)$$

Eingesetzt in die obige Gleichung führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{d \ln[v]}{dx} + k \exp \left[\frac{R - \sqrt{(R + H_P)^2 + x^2}}{H_S} \right] = 0. \quad (5.202)$$

Die Gleichung ist integrabel und führt, wenn wir für die Geschwindigkeit am niedrigsten Punkt H_P der Flugbahn den Wert $v[0] = v_P$ ansetzen, zu der Lösung

$$\ln \left[\frac{v}{v_P} \right] = -k e^{\frac{R}{H_S}} \int_0^x \exp \left[\frac{-\sqrt{(R + H_P)^2 + t^2}}{H_S} \right] dt \quad (5.203)$$

Im Falle $x \rightarrow +\infty$ (Austrittsgeschwindigkeit) und $x \rightarrow -\infty$ (Eintrittsgeschwindigkeit) läßt sich das obige Integral auf eine modifizierte Besselfunktion $\mathbf{K}_1[z]$ zurückführen. Für die Eintritts- und Austrittsgeschwindigkeit erhalten wir so die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \ln \left[\frac{v[-\infty]}{v_P} \right] &= +k e^{\frac{R}{H_S}} (R + H_P) \mathbf{K}_1 \left[\frac{R + H_P}{H_S} \right] \\ \ln \left[\frac{v[+\infty]}{v_P} \right] &= -k e^{\frac{R}{H_S}} (R + H_P) \mathbf{K}_1 \left[\frac{R + H_P}{H_S} \right]. \end{aligned}$$

Mit den Ergebnissen können wir eine erste Frage beantworten: *Mit welcher Geschwindigkeit muss ein Bolide in die höhere Atmosphäre eintauchen, um wieder mit der Entweichgeschwindigkeit dieselbe zu verlassen?* Die Entweichgeschwindigkeit setzen wir mit dem Ausdruck $\sqrt{2gR}$ an.



Fig. 5.26: Ein „Earth-grazing“ Bolide vom 20. Juli 1860, festgehalten in einem Gemälde des amerikanischen Landschaftsmalers F.E. CHURCH (1826-1900). Die leicht gebogene Flugbahn muss wohl der künstlerischen Freiheit des Malers zuzuschreiben sein.

Bezeichnen wir die Eintrittsgeschwindigkeit mit v_0 , so haben wir mit der asymptotischen Formel für modifizierte Besselfunktionen die beiden Grenzbedingungen in der Genauigkeit H_S/R

$$\begin{aligned} v_0 &= v_P \exp \left[+\sqrt{\frac{\pi}{2}} k e^{-\frac{H_P}{H_S}} \sqrt{H_S (R + H_P)} \right], \\ \sqrt{2gR} &= v_P \exp \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}} k e^{-\frac{H_P}{H_S}} \sqrt{H_S (R + H_P)} \right]. \end{aligned}$$

Durch Elimination von v_P ergibt sich asymptotisch genau

$$\frac{v_0}{\sqrt{2gR}} = \exp \left[\sqrt{2\pi} k e^{-\frac{H_P}{H_S}} \sqrt{H_S (R + H_P)} \right]. \quad (5.204)$$

Diese Formel bestimmt für v_0 eine untere Grenze für die notwendige Eintrittsgeschwindigkeit eines „Earth-grazing“ Boliden als Funktion der Oberflächenbeschleunigung g , dem Erdradius R , der Skalenhöhe H_S der Atmosphäre und dem nächsten Annäherungspunkt der Bahn in der Höhe H_P . Es ist natürlich klar, dass $v_0 > \sqrt{2gR}$ sein muss.

In ähnlicher Weise kann das Modell auch die Frage beantworten, bei welcher kritischen Höhe H_P eine Raumkapsel auf die Kreisbahngeschwindigkeit \sqrt{gR} abgebremst wird, wenn diese mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gR}$ in die Atmosphäre eintritt. In diesem Fall ist $v_P = \sqrt{gR}$ und man erhält die Bedingung

$$\sqrt{2} = \exp \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} k e^{-\frac{H_P}{H_S}} \sqrt{H_S (R + H_P)} \right]. \quad (5.205)$$

Durch Auflösen nach H_P ergibt sich

$$H_P = -R - \frac{1}{2} H_S \mathbf{W}_{-1} \left[-\frac{e^{-2R/H_S} \ln[2]^2}{\pi k^2 H_S^2} \right]. \quad (5.206)$$

$\mathbf{W}_{-1}[z]$ bezeichnet hier den unteren Zweig der LAMBERTSCHEN $\mathbf{W}[z]$ -Funktion (siehe Anhang). Eine asymptotische Entwicklung dieser Funktion für extrem kleine negative Argumente führt bis auf Glieder der Ordnung H_S/R zu der Darstellung

$$\boxed{H_P = \frac{1}{2} H_S \ln \left[\frac{R}{H_S} \right] + H_S \ln \left[\frac{\sqrt{2\pi} k H_S}{\ln[2]} \right]} \quad (5.207)$$

Der erste Anteil dieser Abschätzung beschreibt eine von $k \equiv k_D$ unabhängige Höhe, die mit $H_S = 8$ km und $R = 6371$ km bei etwa 27 km liegt. Im nächsten Kapitel werden wir diese Relation unter Einbeziehung der Gravitation präzisieren.

6 Raketenballistik

Schon um das 1045 kennt man in China das Prinzip, mit Pulver *Lanzen des Feuers* auf Gegner zu schießen. Auch in Indien sind zu dieser Zeit Raketen bekannt. Nach Europa gelangen sie spätestens 1379, wo sie in Italien und auch Rumänien bei kriegerischen Auseinandersetzungen gegen osmanische Einfälle zum Einsatz kamen. Berühmt für seine „*Raketen Artillerie Brigaden*“ war aber der indische TIPU SULTAN (Tiger von Mysore) (1750-1799), der seine metallischen Feuerlanzen zum Teil erfolgreich im Kampf gegen die britische Ostindienkompanie einsetzte. Die eigentliche wissenschaftliche Erforschung begann dann in England und Russland zu Beginn des 19ten Jahrhunderts. Der britische Offizier und 2nd Baronet W. CONGREVE (1772-1828) konnte unzerstörte Modelle der indischen Metall-Raketen nach England bringen und sie dort zu 32 Pfund Raketen mit Reichweiten von bis zu 3000 Metern weiter entwickeln. CONGREVE war bei der britischen Bombardierung von Copenhagen 1807 anwesend und konnte sich von der *terrorisierenden* Feuerwirkung der Raketen an Gebäuden überzeugen. Auch bei der Völkerschlacht von Leipzig 1813 kamen *Congreve Raketen* unter der Leitung von Captain R. BOGUE (1782-1813) zum Einsatz.

Der heute wenig bekannte britische Mathematiker W. MOORE (fl.c. (floruit circa) 1806-1823) brachte im Jahre 1813 das Buch *Treatise of the Motion of Rockets* heraus, in dem er zum erstenmal die sogenannte Raketengleichung aufstellte. Er versuchte, die allgemeine Bewegung durch Reihenentwicklungen zu meistern. ([36],[37]). MOORE war wohl zeitweise Mitarbeiter in der Raketengruppe um CONGREVE und entwickelte wie später der russische Artilleriesleutnant K. KONSTANTINOV (1817-1871) 1844 eine Vorrichtung, um die Geschwindigkeit eines Raketenkörpers an jedem Punkt seiner Bahn zu vermessen. Gleichzeitig erfand er ein ballistisches „Raketenpendel“, um die Impulsänderungen während des Abbrennens der Rakete zu untersuchen. Zuvor hatte schon im kaiserlichen Russland der spätere Generalleutnant der Artillerie A. D. SASSJADKO (1779- 1837) nach den Napoleonischen Kriegen mit neuartigen Raketen

experimentiert. Im Russisch-Türkischen Krieg 1828/1829 bildete er die erste Raketenbatterie der russischen Armee. Einen Höhepunkt in Russland bildeten dann die theoretischen Arbeiten von K. E. ZIOLKOWSKI (1857-1935), der zu den eigentlichen Wegbereitern der Raumfahrt gezählt werden kann.

Im Jahre 1844 meldete in England der Erfinder W. HALE (1797-1870) ein Patent an, welche die *Congreve-Rakete* mit ihrem langen Holzstab durch eine stablose schnell rotierende Rakete ersetzen sollte. Diese durch Rotation sich stabilisierende Rakete konnte einfacher und sicherer hergestellt werden und hatte Reichweiten bis zu 4000 Metern. Doch die klassische Artillerie verbesserte sich Mitte des 19ten Jahrhunderts und die eigentliche Entwicklung der modernen Raketentechnik fand dann erst zu Beginn des 20sten Jahrhunderts statt. Die *Hale-Rakete* spielte aber in den britischen Kolonialkriegen bis 1919 eine nicht unbedeutende Rolle.

Historisch ist weiterhin sehr bemerkenswert, dass nach der Bombardierung Kopenhagens im Jahre 1807 durch die britische Flotte sich der Leutnant A. F. SCHUMACHER (1782-1823), der jüngere Bruder des Astronomen H. C. SCHUMACHER (1780-1850), einen Blindgänger der Congreve - Raketen nahm und sich entschloss, auf der dänischen Insel Hjelmsø 1816 eine vom dänischen König unterstützte eigene geheime Raketenforschungsstation einzurichten, die noch nach seinem Tode bis 1834 als Elitegruppe bestand hatte. Außerdem fasste die *Königliche Akademie zu Kopenhagen*, wohl unter dem Eindruck des Raketenangriffs von 1807, den Entschluss, ein Preisausschreiben zum Thema Congreve-Raketen auszustellen. Dort hieß es für das Fach *Mathematik* im Jahre 1810¹

A body which has the form and the figure of a cylinder, such as Congreve's rockets, is projected at a certain elevation or angle with the horizon, and is continually impelled by the flames which issue from it. The substance which feeds the fire is gradually consumed, and the weight of the body diminished.

This being the case,

1.) What is the curve described by that body?

2.) If the inflammable matter contained by the cylinder burns in such a manner that the inflamed strata are neither par-

¹Philosophical Magazine, Band 36, p.232, 1810



Fig. 6.1: Vom 2. - 4. September 1807 bombardierte (terrorisierte) die britische Admiralität während der Napoleonischen Kontinentalperre die Stadt Kopenhagen. Zum Einsatz kamen damals etwa 300 neuartige Congreve-Raketen, welche der britische Offizier WILLIAM CONGREVE auf Grundlage der indischen Raketen des TIPU SULTAN (Tiger von Mysore) (1750-1799) weiterentwickelt hatte. (Bild: C.W. Eckersberg (1783-1853))

allel to each other, nor perpendicular to the axis, to what perturbations will the rocket be subject?

3.) As it is necessary that the cylinder be performed and hollowed, so as to afford the flame a greater surface, and to increase the force of the flame that issues from it, it is

required to know what form or figure is most advantageous for the excavation?

The society wishes that attention be paid, if possible, to the resistance and pressure of the air; but yet the prize will be adjudged to the best answer to the above three questions.

Nicht nur wird hier nach der Bahnkurve gefragt, sondern auch nach detaillierten technischen Details des vorteilhaftesten Raketenkörpers. Selbst Stabilitätsfragen der Rakete werden hier angesprochen. Ein für seine Zeit (um 1810) ein extrem ungewöhnliches Preisausschreiben. Fragen der Flugstabilität treten heutzutage besonders im Sport bezüglich des Anstellwinkels beim **Speerwurf** auf. Seit 1986 wurde der Schwerpunkt gegenüber dem Druckpunkt, wo die aerodynamischen Kräfte angreifen, mehrere Zentimeter nach vorne verschoben. Die heutigen Speere sind daher eher „ballistisch“, während früher die Speere eher „aerodynamisch“ waren, weil die Längsachse gegenüber der momentanen Bahntangente eine stärkere Abweichung aufwies und so ein größerer Auftrieb erzeugt wurde. Bei einer Rakete könnte aber ein von Null verschiedener Anstellwinkel („angle of attack“) dazu führen, dass die aerodynamischen Kräfte die Rakete in Rotation versetzt, was allerdings bei den indischen Raketen des TIPU SULTAN Ende des 18ten Jahrhunderts mit ihrem Bambusstab und Metalllanzen erwünscht war.

6.1 Die Kopenhagener Preisaufgabe von 1810

Bevor wir die Dynamik einer Rakete vom vertikalen Start bis zu den extrem hohen Horizontal-Geschwindigkeiten in eine Erdumlaufbahn betrachten, soll zunächst der oben erwähnte erste Punkt des Kopenhagener Preisausschreibens von 1810 über die Bahnkurve und Dynamik einer erdnahen Rakete genauer untersucht werden. In der bodennahen *Raketenballistik* spielen drei Kräfte eine Rolle: 1) Impulsänderung durch Rückstoß, 2) Luftwiderstand, und 3) Gravitation. Einschließlich Gravitation lautet die Bewegungsgleichung mit dem Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$

$$\dot{\mathbf{v}} + k_D v \mathbf{v} + c_g \frac{\dot{m}}{m} \frac{\mathbf{v}}{v} + \mathbf{g} = 0, \quad (6.1)$$

wo c_g die Ausströmgeschwindigkeit der Gase und $m \rightarrow m[t]$ die durch das Abbrennen des Treibstoffes zeitlich abnehmende Masse der Rakete

bezeichnet. Der ballistische Koeffizient k_D ist natürlich von der Höhe y der Rakete in der Atmosphäre abhängig, was hier aber vernachlässigt werden soll. Eine optimal fliegende *Rakete* muss dabei während des Fluges in der Erdatmosphäre ihre Längsachse immer *exakt parallel zur momentanen Bahntangente* orientieren, um die aerodynamische Belastung zu minimieren. Man kann auch sagen, dass der *Anstellwinkel* praktisch Null sein muss. Diese Voraussetzung werden wir in den folgenden Kapiteln immer machen.

Die allgemeine Lösung der obigen Gleichung (6.1) ist analytisch nicht möglich. Selbst im Falle eines exakt senkrechten Fluges oder $\mathbf{g} = 0$ führt die Lösung auf ein System komplizierter konfluenter hypergeometrischer Funktionen. Wir müssen also Idealisierungen einführen. Wir nehmen an, dass sich die zunehmende Beschleunigung der Rakete mit dem zunehmenden Luftwiderstand so kompensieren, dass wir eine *konstante effektive Beschleunigung* a_s der Rakete längs der Bahntangente annehmen dürfen. Die Geschwindigkeit der Rakete soll zudem wesentlich geringer als \sqrt{gR} sein. Die relevanten Bewegungsgleichungen sind dann einfach (2.9) oder

$$\ddot{x} = a_s \frac{\dot{x}}{v}, \quad \ddot{y} = a_s \frac{\dot{y}}{v} - g. \quad (6.2)$$

Den mit der Geschwindigkeit zunehmenden Luftwiderstand haben wir im idealisierten Modell in die mit der Zeit auch zunehmende Raketenbeschleunigung a_s mit einbezogen. Der Winkel $\theta = \arctan(\dot{y}/\dot{x})$ zeigt während des Fluges sowohl den zeitabhängigen Neigungswinkel der Rakete als auch die identische momentane Neigung der Bahntangente relativ zur Erdoberfläche an. Denn es gilt:

- **angle of attack:** (Anstellwinkel zur Luftströmung): Winkel zwischen Körperlängsachse und Geschwindigkeitsvektor - bei OBERTH mit α bezeichnet.
- **pitch angle:** (Nickwinkel): Winkel zwischen der Körperlängsachse der Rakete und dem Horizont .
- **flight path angle (FPA):** (Flugpfadwinkel): Winkel θ zwischen dem Geschwindigkeitsvektor der Flugbahn und dem Horizont. $\theta = 0$ entspricht horizontalem Flug.

Multiplizieren wir jetzt in (6.2) die erste Gleichung mit \dot{y} , dann die Zweite mit \dot{x} und subtrahieren die zweite von der ersten Gleichung, so erhalten

wir wegen (4.5) in Modifikation zu (4.9) schließlich

$$v \frac{d\theta}{dt} + g \cos[\theta] = 0. \quad (6.3)$$

Multiplizieren wir nun in (6.2) die erste Gleichung mit \dot{x} , die Zweite mit \dot{y} und addieren beide Gleichungen, so ergibt sich

$$\frac{dv}{dt} = a_s - g \sin[\theta]. \quad (6.4)$$

Aufgrund der Kettenregel bei Differentiation folgt weiterhin

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = a_s - g \sin[\theta]. \quad (6.5)$$

Elimination von $d\theta/dt$ durch (6.3) führt unmittelbar zu der Differentialgleichung für $v \rightarrow v[\theta]$

$$g \cos[\theta] \frac{dv}{d\theta} + (a_s - g \sin[\theta]) v = 0. \quad (6.6)$$

Division dieser Gleichung durch $g \cos[\theta]$ und Einführung des Parameters

$$\alpha = \frac{a_s}{g} \quad (6.7)$$

führt zu

$$\frac{dv}{d\theta} + (\alpha \sec[\theta] - \tan[\theta]) v = 0. \quad (6.8)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung kann in der Form

$$\boxed{v[\theta] = \frac{v_H \sec[\theta]}{(\sec[\theta] + \tan[\theta])^\alpha}} \quad (6.9)$$

geschrieben werden. v_H bezeichnet hier die Horizontalgeschwindigkeit der Rakete am Gipfelpunkt der Flugbahn mit $\theta = 0$. Der Hodograph der Geschwindigkeit ergibt sich zu

$$\dot{x} = \frac{v_H}{(\sec[\theta] + \tan[\theta])^\alpha}; \quad \dot{y} = \frac{v_H \tan[\theta]}{(\sec[\theta] + \tan[\theta])^\alpha}. \quad (6.10)$$

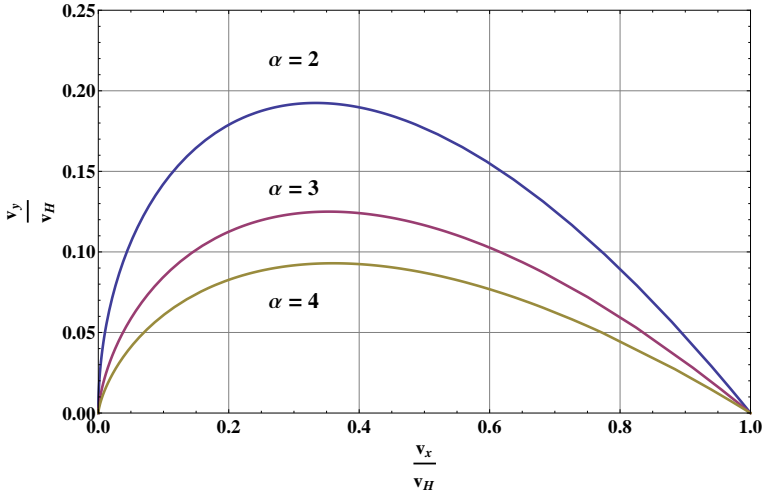


Fig. 6.2: Der Hodograph der un gelenkten Flugbahn einer Rakete mit Beschleunigungen von $2g$ bis $4g$. Normiert auf die horizontale Geschwindigkeit v_H bei $\theta = 0$.

Mit Hilfe von (6.4) ergeben sich jetzt die drei Differentiale

$$dt = -\frac{v_H}{g} \frac{\sec[\theta]^2}{(\sec[\theta] + \tan[\theta])^\alpha} d\theta, \quad (6.11)$$

$$dx = -\frac{v_H^2}{g} \frac{\sec[\theta]^2}{(\sec[\theta] + \tan[\theta])^{2\alpha}} d\theta, \quad (6.12)$$

$$dy = -\frac{v_H^2}{g} \frac{\sec[\theta]^2 \tan[\theta]}{(\sec[\theta] + \tan[\theta])^{2\alpha}} d\theta. \quad (6.13)$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke ist es möglich, die Flugbahn parametrisch als Funktion der momentanen Neigung Θ darzustellen. Die Rakete startet *senkrecht*, beginnt aber für $a_s/g > 2$ sofort nach dem Start den *gravity turn* und fliegt in einer immer mehr sich dem Boden neigenden Bahn bis zum Aufprall weiter. Im Einzelnen gilt jetzt für die Flugzeit

$$T = \frac{v_H}{g} \frac{(\alpha + \sin[\Theta]) \sec[\Theta]}{(\alpha^2 - 1)(\sec[\Theta] + \tan[\Theta])^\alpha} \quad (6.14)$$

und für die Flugbahn in horizontaler

$$x = \frac{v_H^2}{g} \frac{(2\alpha + \sin[\Theta]) \sec[\Theta]}{(4\alpha^2 - 1)(\sec[\Theta] + \tan[\Theta])^{2\alpha}} \quad (6.15)$$

sowie vertikaler Richtung

$$y = \frac{v_H^2}{8g} \frac{(3 + 4\alpha \sin[\Theta] - \cos[2\Theta]) \sec[\Theta]^2}{(\alpha^2 - 1)(\sec[\Theta] + \tan[\Theta])^{2\alpha}} \quad (6.16)$$

Bemerkenswert ist es, dass obige Formeln eine Klasse von Flugbahnen beschreiben, die mit einem *senkrechten Start* ($\Theta = \pi/2$) mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 am singulären Startort $(x, y) = (0, 0)$ beginnen. Der Kurvenparameter ist hier der Neigungswinkel $-\pi/2 < \Theta \leq \pi/2$. Es wird anhand der Formeln auch klar, dass $\alpha > 1$ bzw. $a_s > g$ erfüllt sein muss, damit eine Rakete überhaupt starten kann. Doch nach dem senkrechten Start neigt sich die Flugbahn durch den *gravity turn* sehr schnell aus der senkrechten in die horizontale Lage. Der *immer währende senkrechte Flug* ist hier also ein Trivialfall, der durch die obige Lösungsklasse der entsprechenden Differentialgleichungen nicht beschrieben wird.

Die Gipfelpunkt der Flugbahn ist mit $\Theta = 0$ durch die Ausdrücke

$$T_H = \frac{v_H}{g} \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1}; \quad x_H = \frac{v_H^2}{g} \frac{2\alpha}{4\alpha^2 - 1}; \quad y_H = \frac{v_H^2}{4g} \frac{1}{\alpha^2 - 1}.$$

gegeben. Wichtiger als der Gipfelpunkt ist jedoch die Flugzeit (Brennzeit des Triebwerkes der *Congreve* Raketen) und die Reichweite der Rakete bis zum Aufschlag. Der *negative* Aufschlagwinkel folgt aus der Gleichung (6.16) zu

$$\sin[\Theta_A] = \sqrt{\alpha^2 - 1} - \alpha \quad (6.17)$$

und ist somit nur vom Beschleunigungsverhältnis $\alpha \equiv a_s/g$ abhängig. Mit Hilfe des Hodographen ergibt sich dann die Aufschlaggeschwindigkeit zu

$$\frac{v_A^2}{v_H^2} = \frac{(2 + 2\alpha (\sqrt{\alpha^2 - 1} - \alpha))^{\alpha-1}}{(\sqrt{\alpha^2 - 1} + 1 - \alpha)^{2\alpha}}.$$

Der Quotient strebt für $\alpha > 3$ relativ schnell gegen die Eulersche Zahl e . Das heißt, es gilt für $\alpha \sim 3$ die Abschätzung $v_A \sim \sqrt{e} v_H$. Die Flugweite

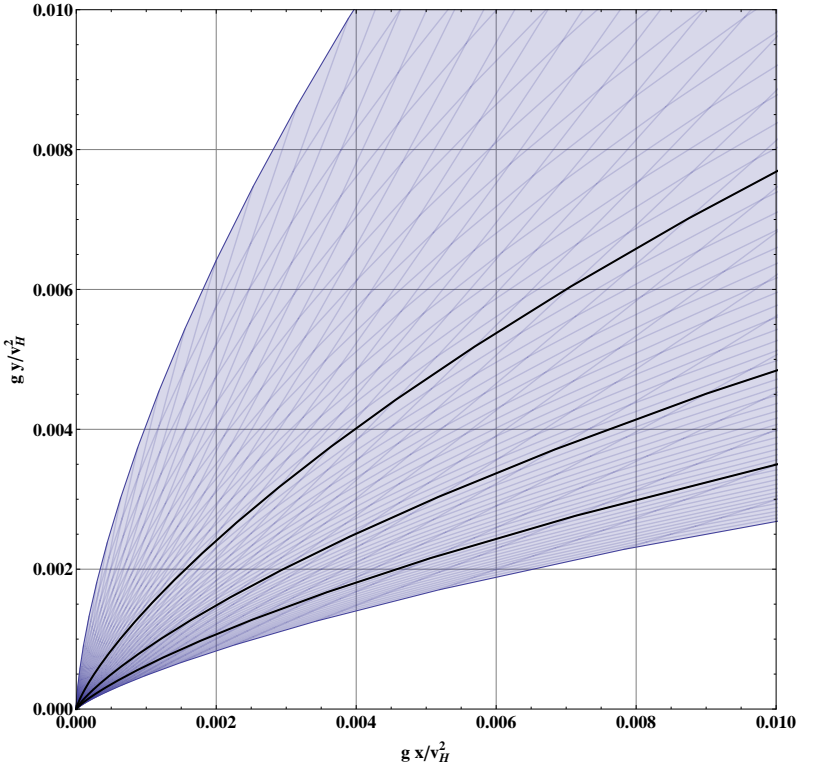


Fig. 6.3: Anfängliche Flugbahnen von idealisiert senkrecht startenden Raketen in Abhängigkeit unterschiedlicher Beschleunigungen $a_s = \alpha g$ mit identischen Gipfelschwindigkeiten v_H . Von der unteren Flugbahn mit $\alpha = 6$ geht es in Schrittwerten von 1 bis zur oberen Bahn mit $\alpha = 2$. Deutlich ist zu sehen, dass bei hohen Beschleunigungen die Rakete effektiv einen „Schrägstart“ durchführt, der durch eine Lafette realisiert werden kann. Nur bei $\alpha = 2$ kann man noch von einem nahezu Senkrechtstart mit anschließendem „gravity turn“ sprechen.

w auf ebenen Gelände lässt sich nun als Funktion von v_A darstellen durch

$$w = \frac{v_A^2}{g} \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \sqrt{2 + 2\alpha(\sqrt{\alpha^2 - 1} - \alpha)}}{4\alpha^2 - 1}. \quad (6.18)$$

In ähnlicher Weise können wir auch die Flugzeit bis zum Aufschlag durch

die überraschend einfache Beziehung

$$\boxed{T_A = \frac{v_A}{g \sqrt{\alpha^2 - 1}}} \quad (6.19)$$

darstellen. Bei den Congreve-Raketen zu Beginn des 19ten Jahrhunderts war die Endgeschwindigkeit sicherlich nicht höher als die Schallgeschwindigkeit c_s . Mit $v_A \sim \mathbf{300}$ m/s, $g \sim \mathbf{10}$ m/s² und $\alpha \sim 3$ erhält man als Abschätzung $T \sim \mathbf{12}$ Sekunden Brenndauer der Raketen. Damit ergibt sich auch die wichtige Relation zwischen Reichweite w und Flugzeit (Brenndauer) T der Rakete zu

$$w = \frac{1}{2} \alpha g T^2 \left(1 - \frac{9}{8\alpha^2} - \frac{1}{128\alpha^4} - \dots \right), \quad (6.20)$$

also mit den obigen Daten etwa **1500** m.

Mathematisch interessant ist das Verhalten der Kurve um den Startort mit $\theta \sim \pi/2$. Mit der Skalierung

$$x = \frac{v_H^2}{g} X; \quad y = \frac{v_H^2}{g} Y$$

folgt für große α das Verhalten ($\alpha \gg 1$, $X \rightarrow 0$)

$$Y \sim \frac{X}{2} \left(1 + \frac{1}{2\alpha} \ln \left[\frac{e}{4\alpha X} \right] \right). \quad (6.21)$$

Man kann hier die interessante Tatsache erkennen, dass Raketen mit sehr hoher Start-Beschleunigung $\alpha \gg 2$ ohne Probleme von einer *Lafette einen Schrägstart durchführen können*, wobei sich asymptotisch als niedrigste Elevation der Winkel $\Theta = \arctan[1/2] \sim 26.4$ Grad ergibt.

Über 100 Jahre nach den längst vergessenen Congreve - Raketen über Kopenhagen wiederholte sich am 14. Juli 1941 in der weißrussischen Stadt Orscha das Geschehen: Plötzlich brach über die deutschen Besatzungstruppen ein höllisches Feuer los. FRANZ HALDER (1884-1972) berichtete in seinem Kriegstagebuch: *Die Russen setzen eine bisher unbekannte Waffe ein. Ein Feuersturm von Geschossen brannte den Bahnhof von Orscha, alle Streitkräfte und militärisches Gerät nieder. Metall schmolz und die Erde brannte.* Zum erstenmal setzte die rote Armee die bis dahin streng

geheimen *Katjuscha* - *Raketenwerfer* BM 8/BM 13 mit Reichweiten von 5500 bis zu 8500 Metern ein. Die Raketen erreichten eine Brennschlussgeschwindigkeit von etwa 250-350 m/s und schlugen nur wenige Sekunden nach ihrer Hörbarkeit ein. (Stalinorgel). Diese Raketen waren somit die erste wirksame Weiterentwicklung der Congreve - Raketen von 1807.

6.2 Die Aufstiegsbahn einer Rakete

Eine zentral Frage der Raketenballistik ist das Problem, mit welcher Flugbahn man optimal von der Erdoberfläche in eine Erdumlaufbahn gelangt. Umgekehrt stellte sich bei der Mondlandung 1969 das Problem, wie man aus einer Kreisbahn oder aus einer Ellipsenbahn um den Mond optimal durch Raketenbremsung auf diesem Körper landet, der ja von keiner Luft-hülle umgeben ist. Beide ziemlich komplizierten dynamischen Probleme² hängen eng miteinander zusammen und sollen hier in einem *idealisierten analytischen* Modell diskutiert werden. Die Grundgleichungen des vorhergehenden Kapitels reichen dafür nicht mehr aus.

HERMANN OBERTH (1894-1989) bezeichnete schon 1929 in seinem Buch *Wege zur Raumschiffahrt* diese nach Osten geneigten optimalen Aufstiegsbahnen als *Synergiekurven* der Rakete ([41])³. Allerdings entspricht diese *Synergiekurve* nicht exakt der von Ihm vorher definierten sogenannten **Raketenlinie**, bei der die Richtung der Raketenlängsachse immer parallel zur momentanen Bahntangente liegt. Beim Flug durch eine Atmosphäre wird dies durch passive Leitwerke automatisch erreicht. In einer Fußnote seines Buches von 1929 auf Seite 177 bemerkte er dann auch ([41]): *Man hat mir hier entgegengehalten, dass das Raumschiff am besten auf einer reinen Raketenlinie aufsteigen würde, weil dabei dauernd $\cos[\alpha] = 1$ sei, während bei der Synergiekurve die Düse wiederholt einen Winkel*

²Im Oktober 2012 berichtete J. VON PUTTKAMER (1933-2012) bei einem Vortrag in Darmstadt (ESOC/ESA) einige Anekdoten über das Vorgehen in den frühen 1960er Jahren bei der NASA, komplizierte Aufstiegsbahnen von Raketen mithilfe der damaligen Rechnertechnik (zunächst mechanische, dann elektrische Walzenrechner) zu berechnen.

³Auf Seite 171 seines Werkes von 1929 schreibt OBERTH: *Die Kurve, die das Raumschiff bei dieser Art des Aufstieges beschreibt, will ich Synergiekurve nennen. Sie zerfällt naturgemäß in vier Abschnitte: 1. Gradliniger schräger Aufstieg, 2. Umbiegung der schrägen Fahrtrichtung in die Waagerechte, 3. waagerechte Fahrt bis zur Erreichung der zirkulären Geschwindigkeit, 4. Von da bis zur Erreichung der Grundgeschwindigkeit Fahrt auf einer Raketenlinie.*



Fig. 6.4: Start der Saturn V (Apollo 11) im Jahre 1969. Wenn die Schallgeschwindigkeit überschritten ist, tritt am Flugkörper ein eigenartiges Phänomen auf, die sogenannte **Prandtl-Glauert-Kondensationswolke**. Es handelt sich hier um kondensierte Wassertropfen hinter der Überschall - Schockwelle.

mit der Fahrtrichtung bilden müsse.... OBERTH bevorzugte für den Start einer Rakete eine schräge Aufstiegsbahn, weil dadurch seiner Meinung nach die Gravitationsverluste etwas vermindert werden. Wir später sehen, dass für hohe Anfangsbeschleunigungen der Rakete (FlaRak - Systeme) diese Forderung tatsächlich sinnvoll ist. Die konsistente Berechnung einer zunächst *senkrechten* Aufstiegsbahn eines Raumschiffes in eine dann *horizontale* Kreisbahn um die Erde in Form einer reinen “*Raketenlinie*” konnte damals von OBERTH aufgrund mathematischer Schwierigkeiten selbst für

eine konstante Raketenbeschleunigung nicht durchgeführt werden. Der folgende Abschnitt wird diese Probleme deutlich aufzeigen.

Die kräftefreie Bewegung einer Rakete folgt der Bewegungsgleichung

$$\dot{v} = \frac{c_g q}{m_0 - q t}. \quad (6.22)$$

Die Größen c_g bedeutet dabei die Ausströmgeschwindigkeit der Gase, q die pro Zeiteinheit ausgestoßene Masse und m_0 die Anfangsmasse der Rakete. Man erhält für die Geschwindigkeit v und den zurückgelegten Weg s die bekannten Formel (Formeln von W. MOORE (1813),[37])

$$\begin{aligned} v &= c_g \ln \left[\frac{m_0}{m_0 - q t} \right] \\ s &= c_g \left\{ t + \left(\frac{m_0}{q} - t \right) \ln \left[1 - \frac{q t}{m_0} \right] \right\} \end{aligned}$$

Im Falle $g = 0$ (ohne Gravitationsfeld) gilt also auch

$$\dot{v} = c_g \frac{q}{m_0} \exp \left[\frac{v}{c_g} \right],$$

woraus folgt, dass die Beschleunigung mit der erzielten Geschwindigkeit exponentiell ansteigt.

Im Folgenden werden wir für unsere *idealisierte Modellrakete* während des Fluges eine mittlere konstante Beschleunigung a_s annehmen. Allerdings kommt jetzt im Gegensatz zum vorhergehenden Kapitels zur Gravitation auch noch die Zentrifugalbeschleunigung aufgrund sehr hoher Geschwindigkeiten hinzu. Allgemeinere Fälle, die von den detaillierten technischen Ausführungen und Massenverlusten der Rakete abhängen, müssen immer numerisch integriert werden. Der höhenabhängige Luftwiderstand $k \rightarrow k[y]$ und eventuell vorhandene aerodynamische Kräfte spielen nur in den unteren Atmosphärenschichten eine Rolle und sollen hier ebenfalls vernachlässigt werden⁴. Der **angle of attack** soll somit immer null sein. Der zeitliche Verlauf dieses Winkels θ (**flight path angle**) zur Bodenfläche wird *durch die dynamischen Beschleunigungen*

⁴Der Luftwiderstand in den unteren Atmosphärenschichten der aufsteigenden Rakete ist für das seltsame Phänomen verantwortlich, dass Astronauten (Kosmonauten) beim plötzlichen Brennschluss der ersten Stufe unerwartet in die Gurte gedrückt werden - die Rakete also bis zur Zündung der zweiten Stufe wieder gebremst wird.

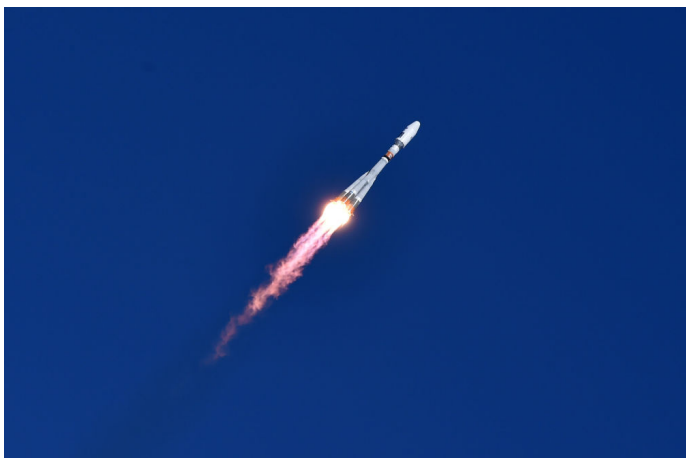


Fig. 6.5: Bei der ballistischen Aufstiegsbahn einer Rakete (hier eine russische Sojus 2-1A vom neuen Kosmodrom Wostotschnij im Jahre 2016) ist der **pitch angle** (Neigungswinkel θ) immer exakt gleich dem Winkel des momentanen Geschwindigkeitsvektors (**flight path angle**) über dem Erdboden. Die Schubbeschleunigung an der Rakete wirkt also wie eine inverse Luftreibung. (Bild: sputnik)

und Geschwindigkeiten der Bahn bestimmt. Man spricht hier auch von einem **Gravity Turn**. Der Neigungswinkel der Rakete muss mit einer aktiven Steuerung ständig nachkorrigiert werden (**Gimbaling**). Während der Neigungsphase zeigt der Schubvektor nicht exakt auf den Schwerpunkt der Rakete. Die optimierte Aufstiegsbahn einer Rakete gehört aus den oben erwähnten Gründen zur Klasse der ballistischen Kurven, die OBERTH im Jahre 1929 als reine *Raketenlinien* bezeichnet hat.

Für eine qualitativen und auch genähertes quantitatives Verständnis ist es wünschenswert, eine genäherte analytische Darstellung der Aufstiegsbahn bis in einen Keplerorbit insbesondere beim Start zu haben und diese dann mit einer numerischen Integration der exakten Gleichungen zu vergleichen. Dazu müssen die exakten Gleichungen so weit idealisiert werden, damit eine analytische Integration möglich ist. Als Grundlage benutzen wir die Modellgleichungen (5.16) und (5.17), in denen aber der Luftwiderstand durch eine entsprechende entgegengesetzte Beschleunigung ersetzt

wird. Dann erhalten wir die mathematischen Modellgleichungen

$$\ddot{x} = a_s \frac{\dot{x}}{v} - \frac{\dot{x} \dot{y}}{R}, \quad (6.23)$$

$$\ddot{y} = a_s \frac{\dot{y}}{v} + \frac{\dot{x}^2}{R} - g. \quad (6.24)$$

Dies sind die globalen ballistischen Differentialgleichungen für die Geschwindigkeitsänderung und Richtungsänderung einer Rakete in der Nähe der Erde bei hohen Geschwindigkeiten. Multiplizieren wir nun (6.23) mit \dot{y} , dann (6.24) mit \dot{x} und subtrahieren die zweite von der ersten Gleichung, so erhalten wir wegen (4.5) in Modifikation zu (4.9) schließlich

$$v \frac{d\theta}{dt} + \left(g - \frac{v^2}{R} \right) \cos[\theta] = 0. \quad (6.25)$$

Multiplizieren wir nun (6.23) mit \dot{x} , dann (6.24) mit \dot{y} und addieren beide Gleichungen, so ergibt sich

$$\frac{dv}{dt} = a_s - g \sin[\theta]. \quad (6.26)$$

Aufgrund der Kettenregel bei Differentiation folgt weiterhin

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = a_s - g \sin[\theta]. \quad (6.27)$$

Elimination von $d\theta/dt$ durch (6.25) führt unmittelbar zu der Differentialgleichung für $v \rightarrow v[\theta]$

$$\left(g - \frac{v^2}{R} \right) \cos[\theta] \frac{dv}{d\theta} + (a_s - g \sin[\theta]) v = 0. \quad (6.28)$$

Auch hier erweist es sich wieder als günstig, anstatt des vertikalen Neigungswinkel θ die Größe z gemäß $\sin[\theta] = \tanh[z]$ einzuführen. Der Neigungswinkel θ der Raketenlängsachse als auch der Bahntangente der Rakete zum Boden ist dabei durch die GUDERMANN - Funktion $\mathbf{gd}[z] = \arctan[\sinh[z]]$ gegeben. Denn es gilt

$$\sin[\theta] = \tanh[z], \quad \cos[\theta] = \operatorname{sech}[z], \quad d\theta = \frac{dz}{\cosh[z]}, \quad (6.29)$$

Für die Umkehrung nach der Hilfsvariablen z folgt

$$z = \ln[\sec[\theta] + \tan[\theta]]. \quad (6.30)$$

Beim Start der Rakete ist aber wegen (6.30) $z \rightarrow \infty$. Der Wertebereich von θ ist dann $\theta \in [0, \pi/2]$ und der von $z \in [0, \infty]$. Aus (6.29) und (6.30) folgt nebenbei auch das interessante Integral

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\cosh[z]} = \frac{\pi}{2}.$$

Mit dieser Transformation verwandelt sich (6.28) in

$$\left(g - \frac{v^2}{R} \right) \frac{dv}{dz} + (a_s - g \tanh[z]) v = 0. \quad (6.31)$$

Wir dividieren diese Gleichung durch $v \neq 0$ sowie g und erhalten das Differential

$$\left(\frac{1}{v} - \frac{v}{gR} \right) dv = - \left(\frac{a_s}{g} - \tanh[z] \right) dz.$$

Eine Integration dieser Gleichung führt zu

$$\ln[v^2] - \frac{v^2}{gR} = -2 \left(\frac{a_s}{g} z - \ln \cosh[z] \right) + C.$$

Die Rakete startet nun vertikal bei $z = \infty$ und erreicht nach einer gewissen Zeit in der horizontalen Lage $z = 0$ die Brennschlussgeschwindigkeit \sqrt{gR} . Daraus folgt für die Integrationskonstante

$$C = \ln[gR] - 1$$

Normieren wir die Geschwindigkeit v mit der horizontalen Endgeschwindigkeit \sqrt{gR}

$$v = \sqrt{gR} \mathbf{V}[z], \quad (6.32)$$

so gelangen wir zu der idealisierten Gleichung

$$\ln[\mathbf{V}^2] - \mathbf{V}^2 = -1 - 2\alpha z + 2 \ln \cosh[z] \quad (6.33)$$

für die Funktion $\mathbf{V}[z]$ einer ballistischen Rakete. Der Parameter α ist durch

$$\alpha = \frac{a_s}{g} \quad (6.34)$$

definiert. Die Auflösung der transzendenten Gleichung (6.33) nach $\mathbf{V}[z]$ gelingt für alle $z \geq 0$ mit dem oberen Zweig der LAMBERTschen \mathbf{W} -Funktion. Die Lösung lautet einfach

$$\mathbf{V}[z]^2 = -\mathbf{W}_0 \left[-e^{-1-2\alpha z} \cosh[z]^2 \right]. \quad (6.35)$$

Die Variable z ist durch (6.30) als Funktion der Neigung θ der Rakete gegeben. Als Funktion von θ können wir auch

$$\boxed{\mathbf{V}[\theta]^2 = -\mathbf{W}_0 \left[-\frac{e^{-1} \sec[\theta]^2}{(\sec[\theta] + \tan[\theta])^{2\alpha}} \right]}. \quad (6.36)$$

schreiben. Die ungewöhnliche Funktion $\mathbf{W}_0[z]$ ist definiert als der obere Zweig der LAMBERTschen Funktion $\mathbf{W}[\xi]$, gegeben als Lösung der äquivalenten Funktionalgleichungen

$$\mathbf{W}[\eta] e^{\mathbf{W}[\eta]} = \eta, \quad \mathbf{W}[\xi e^\xi] = \xi. \quad (6.37)$$

Im Falle einer Endgeschwindigkeit \sqrt{gR} größer als die Kreisbahngeschwindigkeit tritt die Besonderheit auf, dass die Rakete beim Aufstieg *über die beabsichtigte Höhe hinausschießt* und erst beim leichten Sinkflug ($z < 0$) die endgültige horizontale Orbitalgeschwindigkeit \sqrt{gR} erreicht. Wir betrachten diesen Sonderfall hier nicht ausführlich, weil in dieser letzten Flugphase der zweite Zweig $\mathbf{W}_{-1}[\xi]$ der Lambertschen Funktion genommen werden müsste.

Die Geschwindigkeit $v[z] \equiv v[\theta]$ ist damit als Funktion von z oder entsprechend dem Neigungswinkel der Rakete θ bekannt. Es wird mit der Funktion $\mathbf{V}[\theta]$ ein kompliziertes Randwertproblem gelöst, da zum Startzeitpunkt völlig unklar ist, wie die Rakete aus der *Vertikalen* durch ein entsprechend gesteuertes *Neigungsprogramm* mit der *horizontalen Kreisbahngeschwindigkeit* \sqrt{gR} in einer Erdumlaufbahn in einer noch unbekannten Höhe endet. Der Raketenpionier OBERTH bezeichnete Aufstiegsbahnen von Raketen mit geringstem Energieaufwand mit dem Wort **Synergiekurven**. Die Lösungen der obigen Differentialgleichung beschreiben allerdings mehr die von ihm postulierten **Raketenlinien**, bei denen der Anstellwinkel zur Luftströmung oder zur momentanen Bahntangente immer null ist. Letztendlich handelt es sich also um ballistische Kurven. Die Funktion $\mathbf{V}[z]$ ist jetzt der entscheidende Schlüssel, um in

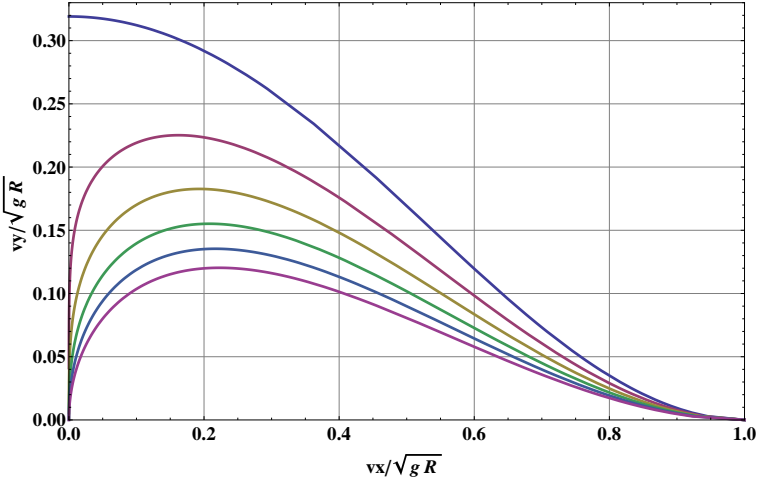


Fig. 6.6: Hodographen ballistischer Aufstiegsbahnen einer Rakete mit konstanter Beschleunigungen von $\alpha = 1$ (singulär; oberste Kurve) bis $\alpha = 2$ (unterste Kurve) in Schritten von 0.2. Die horizontale ($v_x = \dot{x}$) und die vertikale ($v_y = \dot{y}$) Geschwindigkeitskomponente sind in Einheiten der zu erreichenden Kreisbahngeschwindigkeit \sqrt{gR} dargestellt. Die Rakete startet bei einem Winkel $\theta = 90^\circ$ mit der Geschwindigkeit $(v_x, v_y) = (0, 0)$ und gelangt bei einer horizontalen Neigung von $\theta = 0^\circ$ in eine Umlaufbahn mit der Kreisbahngeschwindigkeit \sqrt{gR} . Singulär ist der Wert $\alpha = 1$, bei dem die Rakete die Startrampe nicht verlassen und so auch nicht der „gravity turn“ in die horizontale Richtung stattfinden kann.

unserem idealisierten analytischen Modell die für *Aufstiegsbahnen* und auch *Mondlandebahnen* wichtigen Kenngrößen schnell zu überblicken. Für die Geschwindigkeit \dot{x} über Grund folgt jetzt sofort

$$\dot{x} = \sqrt{gR} \mathbf{V}[z] \operatorname{sech}[z] \equiv \sqrt{gR} \mathbf{V}[\theta] \cos[\theta] \quad (6.38)$$

Wegen $\dot{y} = \dot{x} \tan[\theta]$ folgt für die vertikale Geschwindigkeitskomponente

$$\dot{y} = \sqrt{gR} \mathbf{V}[z] \tanh[z] \equiv \sqrt{gR} \mathbf{V}[\theta] \sin[\theta] \quad (6.39)$$

Mit (6.30) definieren beide Komponenten den Hodographen unserer optimalen Raketenaufstiegsbahn; oder - nach OBERTH - den der Raketenlinie. In Figur (6.6) sind diese für fünf Werte des Parameters α graphisch dargestellt. Um den zeitlichen Verlauf der Aufstiegsbahn analytisch zu

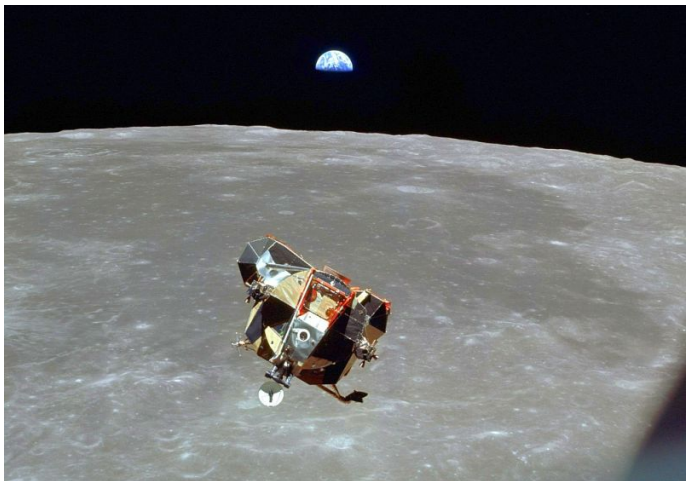


Fig. 6.7: Die Aufstiegsbahn und die dazu symmetrische Abstiegsbahn der Mondlandefähre Eagle im Juli 1969 gehörte zur Klasse ballistischer Flugbahnen, die trotz fehlendem Luftwiderstand genau berechnet werden mussten. Anstellwinkel θ und Schubbeschleunigung waren genau aufeinander abgestimmt, um aus einer bestimmten Kreisbahn der Höhe H über der Mondoberfläche zielgenau in einer Entfernung W längs der Mondoberfläche mit der Geschwindigkeit Null zu landen. (Bild: NASA 1969)

berechnen, transformieren wir zunächst mit $v = \sqrt{gR} \mathbf{V}$ die Gleichung (6.31) in

$$(1 - \mathbf{V}^2) \frac{d\mathbf{V}}{dz} + (\alpha - \tanh[z]) \mathbf{V} = 0 \quad (6.40)$$

um. Mit der Gleichung (6.26) erhalten wir so

$$\sqrt{\frac{g}{R}} dt = -\frac{\mathbf{V}[z]}{1 - \mathbf{V}^2[z]} dz. \quad (6.41)$$

Die Aufstiegszeit der Rakete bis in den waagerechten Flug ergibt sich daraus durch Integration zu

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^\infty \frac{\mathbf{V}[z]}{1 - \mathbf{V}[z]^2} dz. \quad (6.42)$$

Das Integral muss numerisch ausgewertet werden.

Eine wichtige Frage betrifft die erreichte Bahnhöhe H der horizontalen Zielbahn mit der Geschwindigkeit \sqrt{gR} um den Planeten. Mit der Formel für \dot{y} und (6.41) erhalten wir zunächst

$$dy = -R \frac{\mathbf{V}[z]^2}{1 - \mathbf{V}[z]^2} \tanh[z] dz. \quad (6.43)$$

Damit erhalten wir das wichtige Resultat

$$H = R \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{V}[z]^2}{1 - \mathbf{V}[z]^2} \tanh[z] dz. \quad (6.44)$$

Diese Bilanzgleichung bestimmt implizit die Stärke der benötigten Schubbeschleunigung $a_s = \alpha g$, um in eine Kreisbahn von vorgeschriebener Höhe H ($H \ll R$) über einer Planetenoberfläche zu gelangen. Umgekehrt bestimmt diese Gleichung bei einer Mondlandung die Bremsbeschleunigung a_s , die man in einer Kreisbahn bei vorgegebener Flughöhe H über der Mondoberfläche zu einer Punktlandung benötigt.

Durch Umkehrung der Reihe nach der Brenndauer T der Triebwerke und Einsetzen in die obige Formel für die erreichte Höhe H erhält man die genäherte Beziehung

$$H \approx \frac{1}{8} g T^2 \quad (6.45)$$

Hier taucht wieder der ballistische Term $gT^2/8$ der Wurfparabel auf. Die Höhe H der erreichbaren Kreisbahn über der Erdoberfläche hängt in unserem Modell also nur von der operativen Brenndauer T der Triebwerke ab.

Bei den Mondlandungen in den Jahren 1969-1972 benötigt man eine weitere wichtige Kenngröße der Flugbahn: Die Länge des Bahnbogens über der Mondoberfläche vom Startpunkt bis zum Eintritt in die Kreisbahn. Zunächst gilt wieder mit den Grundgleichungen

$$dx = -R \frac{\mathbf{V}[z]^2}{1 - \mathbf{V}[z]^2} \operatorname{sech}[z] dz. \quad (6.46)$$

α	H[km]	W[km]	T[sec]	$8H/(g T^2)$
1.5	593.2	2282.3	819.1	0.721
1.6	480.0	2119.2	715.9	0.764
1.7	399.4	1979.1	639.2	0.797
1.8	339.1	1857.3	579.5	0.824
1.9	292.6	1750.3	531.4	0.845
2.0	255.7	1655.4	491.7	0.862
3.0	98.0	1079.6	290.9	0.944
4.0	52.6	803.8	210.4	0.969
5.0	33.0	640.9	165.6	0.981

Tab. 6.1: Wichtige Kenndaten für eine ballistische Aufstiegsbahn einer Rakete von der Erdoberfläche ohne Luftwiderstand in eine kreisförmige Erdumlaufbahn als Funktion der **konstanten** Schubbeschleunigung $\alpha = a_s/g$. Die Daten wurden mit Hilfe der Integrale (6.44), (6.47) und (6.42) gewonnen. Die physikalischen Konstanten sind $R = 6371$ km und $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Die drei letzten Daten entsprechen hypersonischen Raketen („Awantgard-Gleiflugkörper“), deren lenkbare Flugkörper nach Brennschluss mit einem stark erhitzten Schutzschild in ihr Ziel fliegen.

Wiederum ergibt sich durch eine Integration die Bogenweite W zu

$$W = R \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{V}[z]^2}{1 - \mathbf{V}[z]^2} \operatorname{sech}[z] dz. \quad (6.47)$$

Auch diese Größe hängt nur von α ab. Für die zeitliche Änderung des Neigungswinkels θ der Rakete (*pitch angle = flight path angle*) ergibt sich der Ausdruck

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{R}} \frac{1 - \mathbf{V}^2[z]}{\mathbf{V}[z]} \operatorname{sech}[z] \quad (6.48)$$

Mathematisch interessant ist hier das Verhalten des sogenannten *pitch-over* am Startplatz $z \rightarrow \infty$. Hier gilt mit der asymptotischen Formel für $\mathbf{W}_0[\xi]$

$$\mathbf{V}[z]_{z \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{1}{2} - (\alpha - 1) z \right] \quad (6.49)$$

und daher

$$\frac{d\theta}{dt}_{z \rightarrow \infty} \sim -4 \sqrt{e} \sqrt{\frac{g}{R}} \exp[(\alpha - 2) z] \quad (6.50)$$



Fig. 6.8: Die Aufstiegsbahn einer Rakete (Space Shuttle) ist eine genau vorgegebene Flugbahn, die durch Schwenkung der Triebwerke (*gimbaled thrust*) genau verfolgt wird.

Anhand dieser Formel sieht man deutlich, dass sich am Startplatz der Rakete Aufstiegsbahnen mit konstanter Schubbeschleunigung a_s grundsätzlich in zwei Bereiche aufteilen: I.) $1 < \alpha \leq 2$ und II.) $\alpha > 2$. Im ersten Bereich startet die Rakete mit einem „pitch - over“ von Null, im zweiten Fall beginnt das „pitch - over“ schon am Startplatz mit einem singulären Wert. Hypersonische Raketen mit $a_s \geq 3g$ müssen also schon zu Beginn sofort in eine „Schrägbahn“ übergehen oder gleich in einer solchen Bahn starten. Am Grenzwert $a_s = 2g$ ($\alpha = 2$) gilt

$$\frac{d\theta}{dt}_{\alpha=2} = -4\sqrt{e} \sqrt{\frac{g}{R}} \sim 0.47^\circ/s \quad (6.51)$$

Schon 20 Sekunden nach dem *take off* muss sich so die Rakete mit $a_s = 2g$ schon fast 10 Grad aus der Vertikalen gedreht haben. Aufstiegsbahnen von schweren Trägerraketen haben daher einen α - Parameter immer unterhalb von $\alpha \leq 2$. Die alte SaturnV - Trägerrakete als auch die neueren *ARIANE*-Raketen hielten bzw. halten diese Bedingung tatsächlich ein.

Um die Flugbahn der Rakete kurz nach dem Start als Funktion der Zeit analytisch zu beschreiben, gehen wir auf (6.41) zurück und entwickeln

asymptotisch

$$\sqrt{\frac{g}{R}} dt = -\frac{1}{2} \exp \left[-\frac{1}{2} + (1 - \alpha) z \right] dz. \quad (6.52)$$

Das Integral für kleine Zeiten t lautet dann ($z \gg 1$)

$$\sqrt{\frac{g}{R}} t \simeq \frac{1}{2(\alpha - 1)} \exp \left[-\frac{1}{2} + (1 - \alpha) z \right]. \quad (6.53)$$

In analoger Form ergibt sich aus (6.38) und (6.39) asymptotisch

$$\dot{x} \simeq \sqrt{gR} \exp \left[-\frac{1}{2} - \alpha z \right] \quad (6.54)$$

und

$$\dot{y} \simeq \frac{1}{2} \sqrt{gR} \exp \left[-\frac{1}{2} + (1 - \alpha) z \right]. \quad (6.55)$$

Durch Elimination der Variablen z und durch Einführung der dimensionslosen Zeit

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{R}} t \quad (6.56)$$

erhalten wir im Einzelnen ($\tau \rightarrow 0$)

$$\dot{x} = \sqrt{gR} (\sqrt{e})^{\frac{1}{\alpha-1}} [2(\alpha - 1) \tau]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \dots \quad (6.57)$$

und

$$\dot{y} = \sqrt{gR} (\alpha - 1) \tau + \dots \quad (6.58)$$

Aus der letzteren Gleichung finden durch Integration nach der Zeit t leicht

$$\frac{y}{R} = \frac{1}{2} (\alpha - 1) \tau^2 + \dots \quad (6.59)$$

oder in physikalischen Einheiten

$$y[t] = \frac{1}{2} (a_s - g) t^2 + \dots \quad (6.60)$$

Dies Resultat hätte man auch ohne die asymptotische Analyse hin-

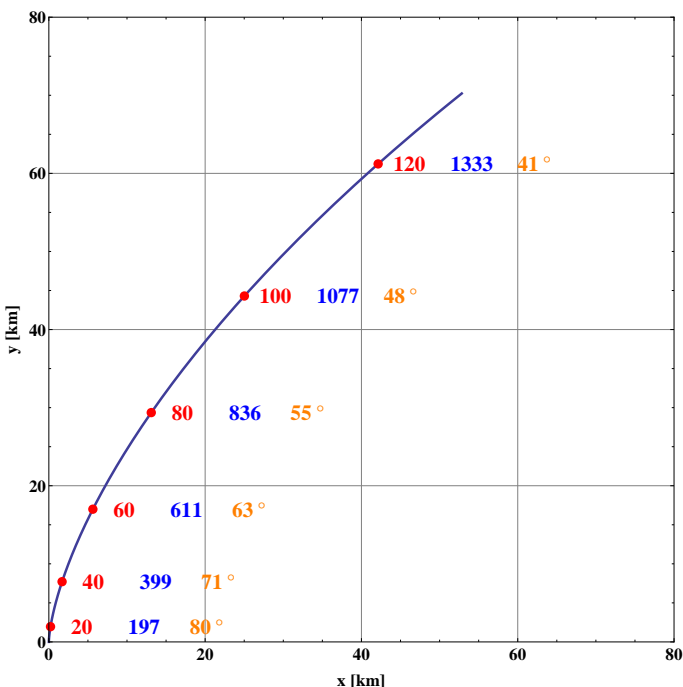


Fig. 6.9: Die Aufstiegsbahn einer Rakete ohne Luftwiderstand im Falle $a_s = 2g \equiv \text{konstant}$. Die roten Zahlen bedeuten die Zeit in Sekunden, die blauen die Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde und die orangen Zahlen den Anstellwinkel der Rakete zum Horizont in Grad. Die Rakete erreicht in dieser Aufstiegsbahn nach 492 Sekunden eine Kreisbahn in einer Höhe von etwa 256 km um die Erde.

schreiben können. Schwieriger ist die Integration der x Koordinate. Man erhält

$$\frac{x}{R} = \frac{1}{2\alpha - 1} \left[2^\alpha \sqrt{e} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} [(\alpha - 1) \tau]^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}} \quad (6.61)$$

Wir führen nun einen Index q nach

$$q = \frac{2\alpha - 2}{2\alpha - 1}; \quad 1 - q = \frac{1}{2\alpha - 1} \quad (6.62)$$

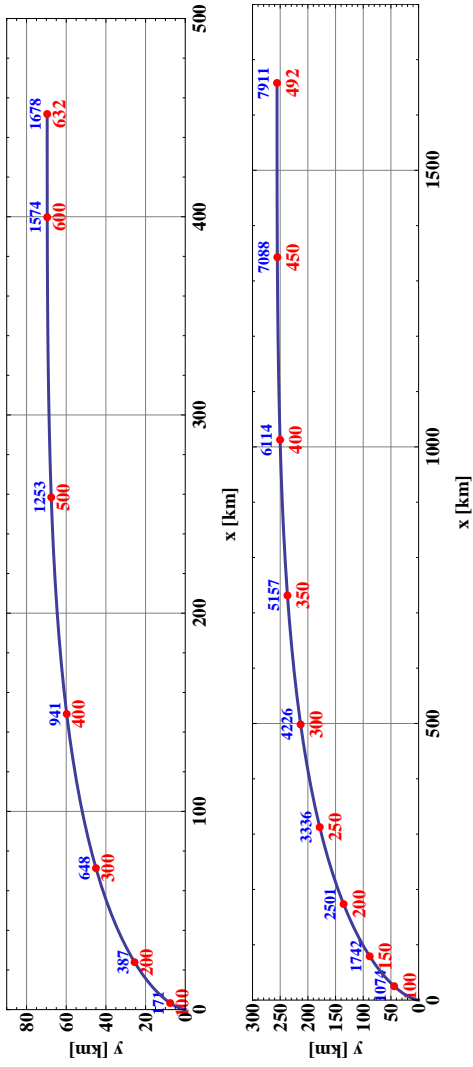


Fig. 6.10: Optimale ballistische Aufstiegsbahnen, nach H. OBERTH auch als Synergiekurve einer Rakete benannt, für den Fall einer konstanten Schubbeschleunigung von $a_s = 2g$ ($\alpha = 2$). Die obere Figur gilt für den Mond mit den Daten $g = 1.62\text{m/s}^2$ und $R = 1734\text{km}$, die untere Figur für die Erde mit $g = 9.81\text{m/s}^2$ und $R = 6371\text{km}$. Die roten Zahlen bedeuten die Zeit in Sekunden nach dem Start, die blauen Zahlen die Geschwindigkeit in m/s .

ein. Mit den dimensionslosen Koordinaten

$$X = \frac{x}{R}, \quad Y = \frac{y}{R} \quad (6.63)$$

können wir eine asymptotische algebraische Gleichung für die Aufstiegsbahn einer Rakete für die Umgebung des Startplatzes angeben. Durch Elimination von τ erhalten wir die asymptotische Darstellung

$$\boxed{Y \sim \frac{1}{2q} \left(\frac{1-q}{2e} \right)^{1-q} X^q} \quad (6.64)$$

wobei e die Eulersche Zahl bedeutet. Mit $\alpha = 2$ ergibt sich zum Beispiel der Index $q = 2/3$, für $\alpha = 3/2$ dagegen $q = 1/2$. Startet die Rakete also mit $a_s = 1.5g$, so sieht ihre idealisierte ballistische Aufstiegsbahn mit „Gravity Turn“ in den ersten Minuten wie die Funktion $Y \sim \sqrt{X/e}/2$ aus. Es zeigt sich allerdings auch, dass ab $\alpha > 3$ sich der q -Wert immer näher der Eins nähert. Das aber bedeutet, dass bei einer hohen Anfangsbeschleunigung $a_s \gg g$ ein Schrägstart der Rakete günstiger wäre als ein Start aus der Vertikalen. Genau dies hatte ja H. OBERTH in seinen Büchern für eine *Synergiekurve* vorgeschlagen. Wir kommen auf dieses Problem bei den FlaRak - Systemen zurück.

Die obigen Ergebnisse motivieren dazu, eine genauere analytische Reihenentwicklung der Aufstiegsbahn zumindest für den wichtigen Grenzfall $a_s = 2g$ abzuleiten, bei dem ein Senkrechtstart in jedem Falle sinnvoll ist. Mit Hilfe von Computeralgebra erhält man so mit (6.23,6.24) und den asymptotischen zeitlichen Limiten (6.61) und (6.60) für die Aufstiegsbahn vom Startplatz aus ($a_s = 2g$)

$$x[t] = \frac{4e^{1/2}g^{3/2}}{3R^{1/2}}t^3 - \frac{32e^{3/2}g^{5/2}}{15R^{3/2}}t^5 + \dots \quad (6.65)$$

und

$$y[t] = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{4eg^2}{3R}t^4 + \dots \quad (6.66)$$

Ganz im Geiste von L. EULER können wir nun die $x[t]$ - Entwicklung nach der Zeit t umkehren und in die zweite Gleichung für $y[t]$ einsetzen. Auf diese Weise ergibt sich für die ballistische Aufstiegsbahn einer Rakete

mit $a_s = 2g$ in den dimensionslosen Koordinaten (6.63) die Darstellung

$$Y = \frac{3^{2/3}}{4(2e)^{1/3}} X^{2/3} - \frac{3^{4/3} e^{1/3}}{2^{2/3} 5} X^{4/3} + \dots \quad (6.67)$$

Für die Neigung θ der Raketenachse zur Horizontalen (*gravity turn*) ergibt sich kurz nach dem Start im Falle $a_s = 2g$ die Zeitentwicklung

$$\theta = \frac{\pi}{2} - 4\sqrt{e} \sqrt{\frac{g}{R}} t + \frac{32 e^{3/2} g^{3/2}}{3 R^{3/2}} t^3 - \dots \quad (6.68)$$

Die idealisierten analytischen Lösungen gelten nur für den Fall $a_s = \textit{konstant}$ und ohne höhenabhängigen Luftwiderstand. Will man diese Effekte für eine detaillierte Berechnung mit einbeziehen, sind nur noch *numerische Modelle sinnvoll*. Dabei müssen wir aufgrund der *singulären Randbedingungen am Startplatz* für die zu erreichende Orbitalgeschwindigkeit numerisch *in der Zeit rückwärts* rechnen, weil der Startplatz mit der Randbedingung $v[0] = 0$ eine Singularität mit unbekannten Randbedingungen für die zeitliche Ableitung $v'[0]$ darstellt. Dabei muss man die Endhöhe H für die Kreisbahn so lange variieren, bis die Randbedingungen am Startplatz $y[0] = 0$ erfüllt sind. Gegenüber der obigen analytischen Rechnung ist dieses iterative numerische Rechnen relativ aufwendig, insbesondere bei zweistufigen Raketen mit unterschiedlichem Schubverlauf.

6.3 Die optimale Mondlandung

Am 20. Juli 1969 bestand zum erstenmal das Problem, ein Raumfahrzeug aus einer Kreisbahn oder Ellipsenbahn auf einem fremden Himmelskörper zu landen, der keine nennenswerte Atmosphäre besitzt. Aus einer Umlaufbahn mit einer bestimmten Horizontalgeschwindigkeit musste ein kontrolliertes Bremsmanöver gestartet werden, um exakt mit der vertikalen Geschwindigkeit Null am Boden zu landen. Das mathematisch Interessante an diesem Vorgang ist auch die Frage, diese Landung *mit einem Minimum an Energieaufwand* zu bewerkstelligen. Wir berechnen mit den Formeln (6.42) und (6.44) die Tabelle (6.2) Hier kann man schon erkennen, dass aufgrund der $\Delta v = a_s T$ Werte der Energieaufwand für eine Landung größer wird, wenn die Anfangshöhe ansteigt. Darum startete die Landephase bei Apollo 11 im *Periselen (perilune)*, bei der

α	H[m]	W[km]	T[sec]	Δv [m/s]
3.0	26414	292	371	1807
3.1	24583	283	358	1798
3.2	22941	274	345	1790
3.3	21463	265	333	1782
3.4	20126	257	322	1776
3.5	18913	250	312	1770
3.6	17809	243	302	1764
3.7	16800	236	293	1759
3.8	15876	230	285	1755
3.9	15028	224	277	1750
4.0	14247	218	269	1747

Tab. 6.2: Wichtige Kenndaten für eine rein ballistische Abstiegsbahn der Mondfähre von einer Mondumlaufbahn als Funktion der **konstanten** Schubbeschleunigung $\alpha = a_s/g$. Die Daten wurden mit Hilfe der Integrale (6.44), (6.47) und (6.42) gewonnen. Die physikalischen Konstanten sind $R = 1734$ km und $g = 1.622\text{m/s}^2$.

die Fähre nur noch eine Höhe von etwa 50000 [f] oder etwa 15240 [m] über der Mondoberfläche hatte. Bei solch einer Höhe benötigt man für eine rein ballistische Landung eine Bremsbeschleunigung von $\alpha \sim \mathbf{3.92}$, also etwa $a_s \sim \mathbf{6.34\text{m/s}^2}$. Die Flugzeit beträgt nur $T \sim \mathbf{275\text{s}}$. Diese kurze Zeitspanne entspricht aber keineswegs den historischen Flugdaten von 1969, bei denen die Flugzeit bis zum *touchdown* etwas $T \sim \mathbf{714\text{ s}}$ betrug. Die Landestrategie muss somit eine Andere gewesen sein. Wir wollen anhand der historischen Daten das damalige Vorgehen genauer rekonstruieren.

In der NASA **TM X-58040** vom Januar 1970 sind die wichtigsten Abstiegsbahndaten des Eagle von Apollo 11 zusammengefasst. In der Tabelle (6.3) sind die Flugdaten in metrische Einheiten (1 [f] = 0.3048 [m]) gerundet umgerechnet. Um die Flugdaten zu verstehen, betrachten wir die speziellen Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = -a \sin[\Theta[t]]; \quad \ddot{y} = a \cos[\Theta[t]] + \frac{\dot{x}^2}{R} - g.$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x[0] = 0, \quad y[0] = H, \quad \dot{x}[0] = v_x, \quad \dot{y}[0] = v_y.$$

<i>Event</i>	$t[\text{m:s}]$	$\dot{x}[\text{m/s}]$	$\dot{y}[\text{m/s}]$	$y[\text{m}]$	<i>Lage</i>
A	- 00:07	-	-	-	-
B	00:00	1695	-1	14879	92°
C	00:26	1685	-1	14851	93°
D	02:56	1219	-15	13696	79°
E	04:18	934	-27	11948	
F	06:24	444	-32	7510	
G	06:42	401	-39	6902	55°
H	08:26	154	-44	2291	
I	10:06	21	-5	156	10°
J	11:54	0	-1	4	

Tab. 6.3: Wichtige historische Kenndaten der Abstiegsbahn der Mondfähre *Eagle* von *Apollo 11* am 20. Juli 1969. Die Events bedeuten: A: Ullage; B: Powered descent initiation, C: Throttle to maximum thrust, D: Rotate to windows-up position, E: LR altitude update, F: Throttle recovery, G: LR velocity update, H: High gate, I: low gate, J: Touchdown (probe contact). Unter „Lage“ ist die Neigung der Mondfähre zur Vertikalen gemeint.

$v_x > 0$ ist die zum Zeitpunkt $t = 0$ gültige Vorwärtsgeschwindigkeit, $v_y < 0$ die Sinkgeschwindigkeit und H die zum Zeitpunkt $t = 0$ gültige Höhe. Innerhalb eines bestimmten Zeitfensters nehmen wir a als konstant an, während der Lagewinkel Θ der Mondfähre von der Zeit abhängig sein soll. Die Lösungen dieser Bewegungsgleichungen setzen wir als Taylorreihe bis zur dritten Ordnung in der Zeit t an. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
x[t] &= v_x t - \frac{1}{2} a \sin[\Theta] t^2 - \frac{1}{6} a \cos[\Theta] \dot{\Theta} t^3 - \dots \\
y[t] &= H + v_y t - \frac{1}{2} \left(g - a \cos[\Theta] - \frac{v_x^2}{R} \right) t^2 - \\
&\quad - \frac{1}{6} a \sin[\Theta] \left(\dot{\Theta} + \frac{2 v_x}{R} \right) t^3 - \dots
\end{aligned}$$

Die Bahndaten der Flugphase B-F kann man mit diesen Formeln sehr gut reproduzieren. Als Unbekannte sind a , Θ und $\dot{\Theta}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ anzusehen. In dieser ersten *braking phase* bis $t = 384\text{s}$ ergeben sich die best-fit Werte

$$a = 3.07 \text{ m/s}^2, \quad \Theta = 91.8^\circ, \quad \dot{\Theta} = -0.11^\circ/\text{s}.$$

Diese Ergebnisse entsprechen sehr gut den NASA - Daten bezüglich der Neigung (*Attitude*) der Mondfähre zur Vertikalen. Da die Abbremsung in der *Periselen* stattfand, musste die Fähre kurzfristig einen Neigungswinkel größer 90° einnehmen, um die Aufwärtsbewegung in der Keplerbahn zu kompensieren. Bei $t = 384\text{s}$ war die Neigung schon auf $\Theta = 51^\circ$ gesunken.

Für die eigentliche *Landephase* wollen wir die obigen Bewegungsgleichungen weiter idealisieren. Mit $R \rightarrow \infty$ und $\dot{\Theta} = 0$ lauten die Lösungen jetzt

$$x[t] = v_x t - \frac{1}{2} a \sin[\Theta] t^2, \quad y[t] = H + v_y t - \frac{1}{2} (g - a \cos[\Theta]) t^2.$$

Der Neigungswinkel der Mondfähre zur Vertikalen soll in diesem Modell also konstant sein. Kurz vor der Bodenberührung kann aber die Fähre trotzdem die Neigung Null haben, weil dann die Bremsbeschleunigung in x - Richtung nicht vom Haupttriebwerk, sondern von kleinen Steuereisen herrührt.

Aus der Landebedingung $\dot{y}[T_L] = 0$ folgt aus den obigen Gleichungen für die Flugzeit ($v_y < 0$)

$$T_L = \frac{v_y}{g - a \cos[\Theta]}. \quad (6.69)$$

Aus der weiteren Bedingung $y[T_L] = 0$ folgt für die notwendige vertikale Bremsbeschleunigung

$$a \cos[\Theta] = g + \frac{v_y^2}{2H} \quad (6.70)$$

Wird $a \cos[\Theta]$ wieder in die Flugzeit T_L eingesetzt, folgt ($v_y < 0$)

$$T_L = -\frac{2H}{v_y}. \quad (6.71)$$

Aus der Bedingung $\dot{x}[T_L] = 0$ folgen für den Anstellwinkel die Bedingungen

$$a \sin[\Theta] = -\frac{v_x v_y}{2H} \quad (6.72)$$

und so mit dem Ausdruck für $a \cos[\Theta]$

$$\tan[\Theta] = -\frac{v_x v_y}{2gH + v_y^2}. \quad (6.73)$$

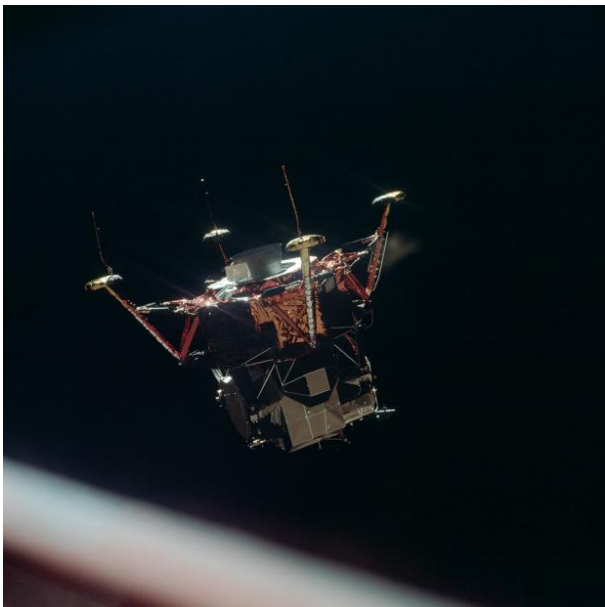


Fig. 6.11: Die Mondfähre „Eagle“ kurz nach der Trennung von der Kommandokapsel von Apollo 11. Bei der Abstiegsbahn der Mondfähre war in der Endphase der Bremsstrahl nicht parallel zum momentanen Geschwindigkeitsvektor.

Hieraus folgt für jede Flugsituation der Neigungswinkel der Landefähre zur Vertikalen entgegen der Flugrichtung. Die Bremsbeschleunigung folgt schließlich aus

$$a = \frac{1}{2H} \sqrt{(2gH + v_y^2)^2 + v_x^2 v_y^2}. \quad (6.74)$$

Es ist nicht weiter überraschend, dass die eigentliche Flugbahn in diesem Modell eine nach unten geneigte *Gerade* mit der Steigung (Gleitverhältnis) von v_y/v_x ist. Dies sieht man ein, wenn die Zeit t in den Ausdrücken für $x[t]$ und $y[t]$ eliminiert wird. Denn dann gilt bis in quadratische Näherung

$$y = H + \frac{v_y}{v_x} x - \frac{v_x g - a v_x \cos[\Theta] - a v_y \sin[\Theta]}{2 v_x^3} x^2 - \dots \quad (6.75)$$

In der Landephase gilt aber nach den obigen Gleichungen

$$a v_x \cos[\Theta] + a v_y \sin[\Theta] = v_x g, \quad (6.76)$$

so dass die Mondfähre in der letzten Minuten vor der Landung einen Gleitflug der Form

$$y = H + \frac{v_y}{v_x} x \quad (6.77)$$

durchführte. Dies läßt sich an Hand der Flugdaten verifizieren.

Als Maß für den Treibstoffverbrauch (Energieaufwand) können wir das Produkt aus Bremsbeschleunigung und Flugzeit ansehen. Man erhält

$$a^2 T_L^2 = 4 g H + v_x^2 + v_y^2 + \frac{4 g^2 H^2}{v_y^2} \quad (6.78)$$

Anhand dieser Beziehung sieht man, dass zu Beginn des Abstieges sowohl eine zu kleine als auch eine zu große Sinkgeschwindigkeit v_y ungünstig sind. Das Optimum liegt bei

$$v_y \approx \sqrt{2 g H}. \quad (6.79)$$

Der Bremsvorgang dürfte bei der Mondlandung also erst dann beginnen, wenn die Sinkgeschwindigkeit v_y in der Höhe H *ungefähr gleich* den Wert $\sqrt{2 g H}$ erreicht hat. Doch ist die optimale Variante aus Sicherheitsgründen ungünstig.

Die obigen Formeln für die Landephase versagen, wenn die Sinkgeschwindigkeit v_y der Fähre zu Beginn fast Null ist, weil dann die Bremstriebwerke sie in der Schwebelage halten würden. Darum betrachten wir zum Abschluss noch einen *Landemodus*, bei dem sich zu Beginn die Mondfähre in einer Höhe H mit einer reinen Horizontalgeschwindigkeit von $v_x = v_0$ bewegt. Die Sinkgeschwindigkeit v_y soll also zu Beginn null sein. Ohne Bremsung würde die Kapsel in einer Parabelbahn zu Boden stürzen. Eine konstant wirkende Bremsbeschleunigung soll jetzt so bestimmt werden, dass nach einer gewissen Zeit die Fähre vertikal auf dem Mond landen kann. Wir machen dabei die Approximation $v_0 \ll \sqrt{g R}$. Dann gilt mit $u^2 \ll R$ in (6.31)

$$\mathbf{V}[z] = e^{-\alpha z} + \dots \quad (6.80)$$

Wir berücksichtigen hier nur den ersten Term und erhalten für die Differentiale der Flugzeit dt , der Weite dx und der Höhe dy

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{v_0^2}{g} e^{-2\alpha z} \cosh[z] dz, \\ dy &= -\frac{v_0^2}{g} e^{-2\alpha z} \sinh[2z] dz, \\ dt &= -\frac{v_0}{g} e^{-\alpha z} \cosh[z] dz. \end{aligned}$$

Daraus folgen mit $\alpha = a_s/g$ durch Integration von $z = \infty$ nach $z = 0$ die Bahndaten

$$W = \frac{v_0^2}{g} \frac{2\alpha}{4\alpha^2 - 1}; \quad H = \frac{v_0^2}{4g} \frac{1}{\alpha^2 - 1}. \quad (6.81)$$

und die Flugzeit

$$T_L = \frac{v_0}{g} \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1}.$$

Mit der Formel (6.81) für die Höhe H ergibt sich als erforderliche Bremsbeschleunigung $a_s = \alpha g$

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{4gH}}. \quad (6.82)$$

Für die Flugzeit erhalten wir so

$$T_L = 2 \sqrt{\frac{H}{g} \left(1 + \frac{4gH}{v_0^2}\right)} \quad (6.83)$$

Das Produkt aus a_s und T_L bestimmt wieder den Energieaufwand des Landevorganges. Man erhält

$$a_s T_L = v_0 + \frac{4gH}{v_0}. \quad (6.84)$$

Ähnlich wie im vorhergehenden Modell eines Gleitfluges existiert auch hier eine *optimale Relation* zwischen der Horizontalgeschwindigkeit v_0 und der Höhe H . Der Energieaufwand (Treibstoffverbrauch) ist dann minimal, wenn die Bedingung

$$v_0 \approx 2 \sqrt{gH}. \quad (6.85)$$

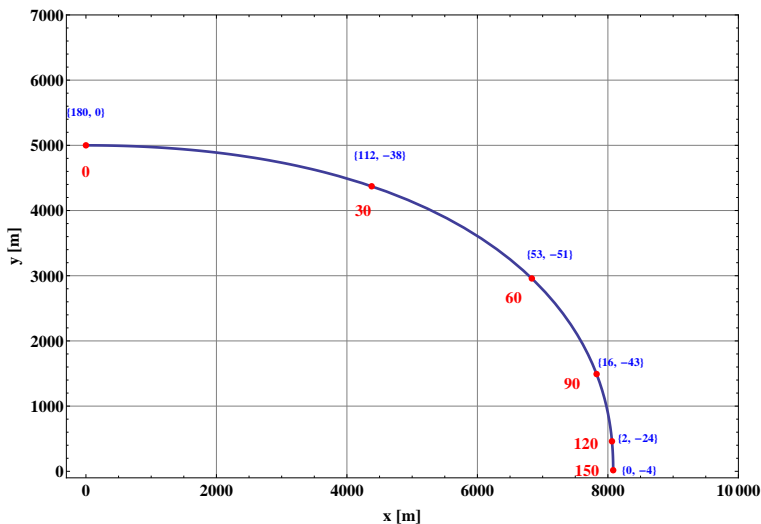


Fig. 6.12: Eine optimale Abstiegsbahn aus 5000 m Höhe auf den Mond, bei der die Bremsbeschleunigung immer tangential zur Bahnkurve ausgerichtet ist. Die roten Zahlen bedeuten die Zeit in Sekunden, die blauen Zahlen die Vorwärts - und die Sinkgeschwindigkeit in m/s. Mit $v_0 = 2\sqrt{gH} \sim 180\text{ m/s}$ muss hier $a_s = \sqrt{2}g$ sein. Die Forderung zwischen v_0 und H kann aber in der Realität nicht erfüllt werden. Die Oberflächenbeschleunigung auf dem Mond ist im Mittel $g = 1.622\text{ m/s}^2$.

erfüllt ist. Die Bremsbeschleunigung muss dann

$$a_s = \sqrt{2}g \quad (6.86)$$

und die dazugehörige Flugzeit

$$T_L = 2\sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (6.87)$$

betragen.

6.4 Der Max Q Punkt

Eine letzte wichtige Frage bezüglich der Aufstiegsbahn einer Rakete können wir noch mit Hilfe eines einfachen analytischen Modelles beantworten:

In welcher Höhe erfährt die Rakete beim Aufstieg durch die Luftreibung den maximalen aerodynamischen Staudruck ? Von welchen Parametern hängt diese kritische Höhe und ihr zugehöriger kritische Staudruck ab?. Diese wichtige Stelle in der Aufstiegsbahn nennt man auch den **Max Q** Punkt. Er liegt meistens in einer Höhe von 10 - 15 km.

Zur Abschätzung idealisieren wir die Aufstiegsbahn im unteren Bereich durch eine zur Erdoberfläche *senkrechte gerade Linie*. Die dafür geeignete Differentialgleichung entnehmen wir dem Kapitel über den Senkrechtschuß. Mit (4.227) gilt dann für die Aufstiegs geschwindigkeit $v[h]$ einer Rakete mit konstanter effektiver Schubbeschleunigung a_{eff}

$$v \frac{dv}{dh} + k \exp [-h/H_S] v^2 = a_{eff}. \quad (6.88)$$

Auch hier führen wir die neue Höhenvariable η

$$\eta = e^{-h/H_S}; \quad \frac{d\eta}{\eta} = -\frac{dh}{H_S} \quad (6.89)$$

ein. Die Differentialgleichung für die idealisierte senkrechte Aufstiegsbahn einer Rakete mit Luftwiderstand lautet dann

$$v \frac{dv}{d\eta} - k H_S v^2 + \frac{a_{eff} H_S}{\eta} = 0. \quad (6.90)$$

Ihre Lösung mit der Anfangsbedingung $v[1] = 0$ lautet für positiv definierte Aufwärtsgeschwindigkeit

$$v[\eta] = \sqrt{2 a_{eff} H_S} e^{-k H_S \eta} \sqrt{\mathbf{Ei}[-2 k H_S] - \mathbf{Ei}[-2 k H_S \eta]} \quad (6.91)$$

Die Funktion $\mathbf{Ei}[x]$ ist wiederum durch den *Cauchy - Hauptwert* des Integrals

$$\mathbf{Ei}[x] = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$$

definiert. Analytische Untersuchungen zeigen nun das bemerkenswerte Resultat, dass im Grenzfall $k \rightarrow 0$ der Ausdruck

$$k \exp [-y/H_S] v[y]^2$$

unabhängig von der Schubbeschleunigung a_s in der Höhe $H_Q \equiv H_S$ maximal wird. Im Falle $k H_S = 1$ gilt immer noch $H_Q = \mathbf{0.82} H_S$. Mit

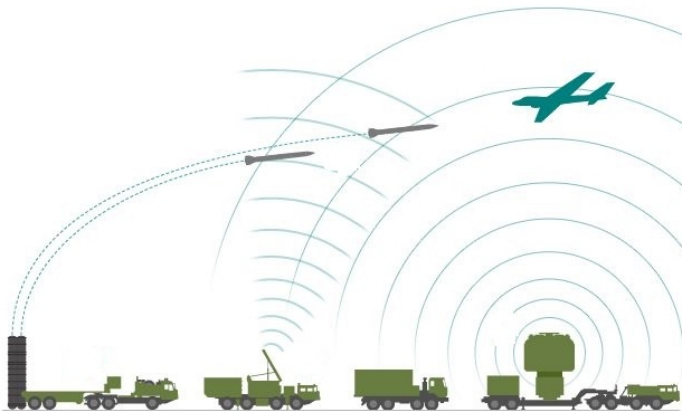


Fig. 6.13: Das moderne russische S400 - Triumpf FlaRak System. Die Rakete wird vertikal durch ein Gas-Katapult in etwa 30m Höhe geschleudert, wird dann um einen bestimmten Winkel gedreht und beschleunigt nach Zündung des Feststofftriebwerkes sehr schnell auf eine Geschwindigkeit von mehr als 2500m/s.

$H_S \sim 8 \text{ km}$ liegt dies etwas unterhalb den in der Literatur angegeben Werten. Für die Geschwindigkeit $v[H_Q]$ erhält man Werte, die in der Nähe der kritischen *Schallgeschwindigkeit* der entsprechenden Atmosphäre liegen. Generell liegt somit die maximale Beanspruchung beim Überschreiten der Schallgeschwindigkeit.

6.5 Die Kinematik einer Flugabwehrrakete

Eine Boden - Luft Rakete zur Abwehr eines angreifenden Ziels (FlaRak) muss sehr schnell in einen gewissen Höhenbereich mit einer extrem großen Geschwindigkeit gelangen. Dabei ist die Brenndauer der einstufigen Rakete auf eine relativ kurze Zeit beschränkt. Das heute modernste FlaRak System ist das S400 Triumpf System (NATO Code SA-21 Growler) aus der russischen Föderation. Das System kann mindestens vier verschiedene Raketentypen mit unterschiedlichen Reichweiten abfeuern. Es sollen in diesem Abschnitt die einfachsten Grundgleichungen für die Verfolgung eines Ziels aufgestellt werden. Bezeichnen wir mit dem Vektor $\mathbf{r}_1[t]$ die Position der Rakete, mit $\mathbf{r}_2[t]$ die Position des Zieles, so lautet die einfachste

Verfolgungsgleichung

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = v \mathbf{e}; \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (6.92)$$

$v \rightarrow v[t]$ ist hier die zeitabhängige Geschwindigkeit der Rakete. Durch den Einheitsvektor \mathbf{e} zeigt der Geschwindigkeitsvektor der Rakete stets auf das Ziel. Um die Beschleunigungen zu analysieren, berechnen wir

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = a \mathbf{e} + v \dot{\mathbf{e}}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_1 = j \mathbf{e} + 2a \dot{\mathbf{e}} + v \ddot{\mathbf{e}}. \quad (6.93)$$

Die Größe $j \rightarrow j[t]$ bezeichnet den Ruck (*jerk*), also die Änderung der Beschleunigung. Man sieht, dass bei einer FlaRak die Richtungsänderung $\dot{\mathbf{e}}$ sehr wesentlich ist. Weiterhin gilt

$$\dot{\mathbf{r}}_1 \times \ddot{\mathbf{r}}_1 = v^2 (\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}) \quad (6.94)$$

Damit läßt sich die *Torsion*

$$\tau = \frac{(\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}) \circ \ddot{\mathbf{e}}}{v |\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}|^2} \quad (6.95)$$

der Bahnkurve berechnen. Je nach Vorzeichen von τ spricht man von rechts - oder links-wendigen Flugkurven. Ohne entsprechende aerodynamische Leitflügel vorne und/oder hinten können Raketen diese Wendigkeit nicht erreichen.

6.6 Die vertikale Aufstiegsbahn

In einem vorhergehenden Kapitel haben wir die Aufstiegsbahn einer Rakete in eine kreisförmige Umlaufbahn um die Erde in einem idealisierten Modell betrachtet. Dabei wurde angenommen, dass sich die Schwerebeschleunigung g mit der Höhe H vom Erdboden nicht ändert. Diese Vereinfachung soll nun für den Spezialfall einer vertikalen Aufstiegsbahn einer Rakete fallengelassen werden. Die Bewegungsgleichung entlang des Radius r vom Erdmittelpunkt lautet jetzt

$$\ddot{r} = a_s - g \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad (6.96)$$

in der wieder a_s die als konstant angenommene Schubbeschleunigung der Rakete, g die Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche und R den Erdradius bezeichnen. Multiplikation der Gleichung mit \dot{r} und Integration nach der Zeit führt zunächst zu

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 = a_s r + g \frac{R^2}{r} + C_1. \quad (6.97)$$

Die Integrationskonstante ergibt sich aus der Randbedingung, dass zum Startzeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit der Rakete Null ist. Damit erhalten wir

$$\dot{r}^2 = 2 a_s (r - R) + 2 g R \left(\frac{R}{r} - 1 \right). \quad (6.98)$$

Wir nehmen jetzt an, dass in der Höhe H_b über dem Erdboden die Rakete Brennschluss hat. Die dann erzielte vertikale Geschwindigkeit v_b ergibt sich zu

$$v_b^2 = 2 a_s H_b + 2 g R \left(\frac{R}{R + H_b} - 1 \right). \quad (6.99)$$

Nach Erreichen dieser Höhe H_b fliegt die Rakete noch ohne Antrieb bis zur ihrer Gipfelhöhe H weiter und fällt dann im freien Fall wieder zum Erdboden zurück. Energetisch führt dies auf die alternative Bedingung

$$v_k^2 = 2 g R \left(\frac{R}{R + H_b} - \frac{R}{R + H} \right). \quad (6.100)$$

Durch Differenzbildung ergibt sich so die wichtige Relation

$$\boxed{a_s H_b = g R \left(1 - \frac{R}{R + H} \right)}. \quad (6.101)$$

Die energetische Bedeutung dieser Relation ist offensichtlich. Aus einer bekannten Gipfelhöhe einer Rakete beim Senkrechtsflug können wir also auf das Produkt aus Schubbeschleunigung a_s und Brennschlusshöhe H_b schließen.

Eine weitere Bedingung ergibt sich aus der gesamten Flugzeit der Rakete vom Start bis zum Wiederaufprall auf der Erdoberfläche. Die

erste Zeitspanne T_1 ist die Brenndauer der Raketentriebwerke bis in die Höhe H_b . Mit Hilfe von (6.98) erhält man hierfür das Integral

$$T_1 = \int_0^{\frac{H_b}{R}} \frac{\sqrt{R(1+u)} du}{\sqrt{2u(a_s - g + a_s u)}}. \quad (6.102)$$

Bei Höhen H_b bis etwa 1000 km lässt sich das Integral bis auf wenige Sekunden durch den Ausdruck

$$T_1 \sim \sqrt{\frac{2H_b}{a_s - g}} \quad (6.103)$$

approximieren. Die weiteren Zeitabschnitte T_2 bis zum Gipfelpunkt und T_3 bis zum Aufprall können einfach mit Hilfe des Differentials

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{R}{r} - \frac{R}{R+H}}} = \sqrt{2gR} dt$$

berechnet werden. Wir erhalten im Einzelnen

$$T_2 = \frac{\sqrt{\frac{R+H}{R}} \left(\sqrt{(R+H_b)(H-H_b)} + (R+H) \arctan \left[\sqrt{\frac{H-H_b}{R+H_b}} \right] \right)}{\sqrt{2gR}},$$

$$T_3 = \frac{\sqrt{\frac{R+H}{R}} \left(\sqrt{RH} + (R+H) \arctan \left[\sqrt{\frac{H}{R}} \right] \right)}{\sqrt{2gR}}.$$

Analytisch kompakter können wir mit der hypergeometrischen Funktion auch

$$T_2 = \sqrt{\frac{2(H-H_b)}{g}} \left(1 + \frac{H}{R} \right) {}_2F_1 \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{H-H_b}{R+H} \right] \quad (6.104)$$

und

$$T_3 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \left(1 + \frac{H}{R} \right) {}_2F_1 \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{H}{R+H} \right] \quad (6.105)$$

schreiben. Die gesamte Flugzeit ist somit $T = T_1 + T_2 + T_3$.

Die Formeln sollen nun an zwei Testflügen der Nordkoreanischen zwei-stufigen ballistischen Raketen *Hwasong-14* und *Hwasong-15* aus dem

Jahre 2017 erprobt werden. Beide Raketen flogen zwar nicht in einer exakten vertikalen Flugbahn, doch bei einem $H : W$ Verhältnis von etwa 4:1 oder 5:1 ist die vertikale Bahn schon eine sehr gute Approximation. Am 17. Juli 2017 erreichte eine *Hwasong-14* eine Gipfelhöhe von $H = \mathbf{3725}$ km. Die gesamte Flugzeit bis zum Aufschlag im Japanischen Meer betrug $T \sim \mathbf{2832}$ s. Mit $R = \mathbf{6371}$ km und $g = \mathbf{9.81\,m/s^2}$ entspricht diese Gipfelhöhe $H = \mathbf{3725}$ km einer reinen ballistischen Flugzeit von

$$2T_3 \sim \mathbf{2581\,s}$$

Die Differenz zur längeren Flugzeit von **2832** Sekunden muss im Wesentlichen auf die Beschleunigungsphase der Rakete beim Start zurückzuführen sein. Eine konsistente Lösung der Gleichungen (6.101) mit den drei Zeitabschnitten führt auf die eindeutigen Parameter

$$a_s \sim \mathbf{21\,m/s^2}; \quad H_b \sim \mathbf{1100\,km}; \quad T_1 \sim \mathbf{435\,s}$$

Am 28. November 2017 erreichte eine neu entwickelte *Hwasong-15* eine Gipfelhöhe von $H \sim \mathbf{4475}$ km. Die gesamte Flugzeit bis zum Aufschlag im Japanischen Meer betrug diesmal $T \sim \mathbf{3180}$ s. Die reine ballistische Boden-Boden Flugzeit für diese Höhe beträgt

$$2T_3 \sim \mathbf{3012\,s}.$$

Aus der Differenz ergeben sich jetzt die Parameter

$$a_s \sim \mathbf{29\,m/s^2}; \quad H_b \sim \mathbf{897\,km}; \quad T_1 \sim \mathbf{304\,s}$$

Deutlich ist zu erkennen, dass die beiden Stufen der *Hwasong-15* im Mittel mit $a_s \sim \mathbf{3\,g}$ beschleunigen, also wesentlich stärker als die der *Hwasong-14* mit etwa $a_s \sim \mathbf{2\,g}$ sind. Auffällig ist auch die wesentlich kürzere Gesamt-Brenndauer gegenüber den *Hwasong-14* Triebwerken.

Beim vertikalen Raketenflug des Amazon-Milliardärs J. BEZOS im Juli 2021 in der Raumkapsel *New Shepard* für Weltraumtouristen in Höhen von über 100 km können wir in den obigen Formel die Abnahme von g in guter Näherung vernachlässigen. Für die Brennschlussgeschwindigkeit ergibt sich bei angenommenen konstanten a_s

$$v_b = (a_s - g) T_1; \quad H_b = \frac{1}{2} (a_s - g) T_1^2. \quad (6.106)$$

Elimination von T_1 führt so auf

$$H_b = \frac{v_b^2}{2g} \frac{1}{\alpha - 1}. \quad (6.107)$$

Für die Gipfelhöhe ergibt sich analog

$$H_g = \frac{v_b^2}{2g} \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \quad (6.108)$$

Das Verhältnis von Gipfelhöhe H_g und Brennschlusshöhe H_b ist in diesem idealisierten Modell somit genau $\alpha \equiv a_s/g$. Die gesamte Flugzeit ohne Luftwiderstand entspräche dem Ausdruck

$$T_F = \frac{v_b}{g} \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1} + \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} \right).$$

Mit Luftwiderstand muss der Wurzelausdruck durch den Faktor in (4.240) korrigiert werden. Diese Korrektur kann die Missionsdauer um den Faktor 2 erhöhen.

6.7 Die Keplerbahn

Wie weit kann eine *ballistische Interkontinentalrakete* nach dem Brennschluss der letzten Stufe fliegen? Mit den Formeln der Wurfparabel können wir das nicht mehr genau genug abschätzen, da zwar über 100 km Höhe der Luftwiderstand praktisch verschwindet, dafür aber das Gravitationsfeld kein konstantes Beschleunigungsfeld mehr darstellt und die Erdoberfläche gekrümmt erscheint. Die Rakete bewegt sich nun bei Geschwindigkeiten von etwa 6 km/s auf einer *Keplerschen* Ellipse, und es besteht die Aufgabe, die Formel (3.3) als Grenzfall einer allgemeineren Beziehung aufzufassen. Dies Problem hat schon I. NEWTON in seinem Hauptwerk 1687 andiskutiert. Als neue Größe führe man jetzt die Kreisbahngeschwindigkeit v_K eines masselosen Körpers um die Erdkugel mit der Masse M im Abstand R ein. Für diese gilt (G = Gravitationskonstante; $g = G M/R^2$)

$$v_K = \sqrt{\frac{G M}{R}} \equiv \sqrt{g R} \quad (6.109)$$

Hat nun eine Rakete nach Brennschluss im Abstand R vom Erdmittelpunkt die Geschwindigkeit v_0 und den Abgangswinkel Θ (Elevationswinkel), so besteht die Aufgabe, diese lokalen Parameter mit den globalen Bahnkonstanten der Keplerellipse zu verknüpfen. Man kann so vorgehen: In Polarkoordinaten (r, χ) lautet die Ellipsengleichung

$$r[\chi] = \frac{p}{1 - \epsilon \cos[\chi]}. \quad (6.110)$$

$\chi = 0$ bedeutet hier das Apogäum der Bahn (siehe Fig. 6.14). Mit dem ganzen Bogenwinkel φ und dem Erdradius R erhält man die erste geometrische Bedingung

$$R = \frac{p}{1 - \epsilon \cos[\varphi/2]}. \quad (6.111)$$

Andererseits gilt für das Quadrat der Geschwindigkeit in einer Keplerellipse

$$v^2 = \sqrt{G M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}, \quad (6.112)$$

wo G die Gravitationskonstante, M die Masse des Planeten und a die große Halbachse der Ellipse bedeuten. Für den Bahnparameter gilt außerdem $p = a(1 - \epsilon^2)$. Mit dem Geschwindigkeitsverhältnis

$$\gamma = \frac{v_0}{v_K} \equiv \frac{v_0}{\sqrt{g R}} \quad (6.113)$$

erhält man so eine dynamische Bedingung

$$\gamma^2 = \frac{R}{p} (1 - 2\epsilon \cos[\varphi/2] + \epsilon^2). \quad (6.114)$$

Aus (6.111) und (6.114) folgt die wichtige Bedingung

$$\gamma^2 = 1 + \epsilon^2 - (2 - \gamma^2) \epsilon \cos[\varphi/2]. \quad (6.115)$$

Eine zweite geometrische Bedingung entsteht durch den an der Erdoberfläche gültigen Elevationswinkel Θ und die lokale Neigung der Bahntangente gegenüber dem Radiusvektor. Mathematisch lautet die Bedingung

$$\tan[\Theta] = \left| \frac{1}{r} \frac{dr}{d\chi} \right|_{\chi \rightarrow \varphi/2} \quad (6.116)$$

Mit Hilfe der Ellipsengleichung folgt daraus

$$\tan[\Theta] = \frac{\epsilon \sin[\varphi/2]}{1 - \epsilon \cos[\varphi/2]} \quad (6.117)$$

Aus (6.114) und (6.117) kann man ϵ eliminieren und erhält eine Bestimmungsgleichung für den Bahnbogen φ und damit auch für die Wurfweite $W = R\varphi$

$$(2 - \gamma^2) \sin[\varphi/2] = \gamma^2 \sin(2\Theta + \varphi/2). \quad (6.118)$$

Auflösen nach φ führt zu

$$\tan\left[\frac{\varphi}{2}\right] = \frac{v_0^2 \sin[2\Theta]}{2(gR - v_0^2 \cos[\Theta]^2)} \quad (6.119)$$

Dieser Ausdruck ist die NEWTON'sche Erweiterung der Beziehung (3.3) – nun aber für sehr hohe Abgangsgeschwindigkeiten, um auch den Einfluss der Erdkrümmung und die Abnahme der Erdbeschleunigung mit der Höhe zu berücksichtigen. Die Wurfparabel ist jetzt der lokale Grenzfall einer Keplerschen Ellipse geworden. Die Wurfweite W *längs der Kugeloberfläche der Erde* ist die Bogenlänge

$$W = R\varphi. \quad (6.120)$$

Durch eine Reihenentwicklung nach γ und $\varphi = W/R$ lässt sich die Korrespondenz beider Formeln leicht veranschaulichen. Man erhält mit (6.119)

$$W = \frac{v_0^2}{g} \sin[2\Theta] \left(1 + \gamma^2 \cos[\Theta]^2 + \dots\right) \quad (6.121)$$

Im Falle $\gamma \rightarrow 0$ erhalten wir wieder die klassische *Torricelli - Galilei* Formel der Wurfweite.

Um die Gipfelhöhe H der Bahn im *Apogäum* der Bahn (*Erdferne*) über dem Erdboden zu berechnen, benötigen wir noch die restlichen zwei globalen Konstanten der Keplerbahn, nämlich die Exzentrizität ϵ und den Bahnparameter p . Es gilt

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sqrt{1 - (2 - \gamma^2) \gamma^2 \cos[\Theta]^2}, \\ p &= \gamma^2 R \cos[\Theta]^2, \\ a &= \frac{R}{2 - \gamma^2}. \end{aligned} \quad (6.122)$$

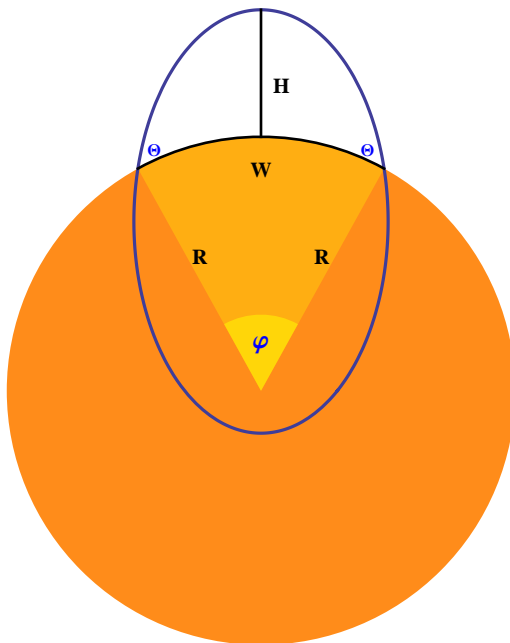


Fig. 6.14: Die Wurfparabel auf der Erdoberfläche als Grenzfall einer Kepler'schen Ellipse um den Erdmittelpunkt. Die Gipfelhöhe H ist durch die Formel (6.123), die Wurfweite $W = R\varphi$ durch die Formel (6.119) berechenbar. Der Elevationswinkel Θ ist beim Abschussort und Zielort identisch. Bei einer **optimalen Flugbahn** gilt die Beziehung $\Theta = (\pi - \varphi)/4$. Schon 1686 hat I. NEWTON ähnliche Betrachtungen angestellt.

Für $\gamma = 0$ folgt zum Beispiel für die Bahnhalfachse $a = R/2$. Dies ist kein Paradoxon, denn man denkt sich ja die ganze Masse im Erdmittelpunkt vereinigt. Die Situation ist also nicht identisch mit einem Stein, der in einen Schacht fallen würde, der durch die ganze Erde bis auf die andere Seite getrieben wäre.

Mit den obigen Formeln ergibt sich die Gipfelhöhe H im *Apogäum* (= *Erdferne*) der Bahn über dem Erdboden zu

$$H = R \left(\frac{\sqrt{1 - (2 - \gamma^2) \gamma^2 \cos[\Theta]^2} - (1 - \gamma^2)}{2 - \gamma^2} \right). \quad (6.123)$$

Eine Reihenentwicklung führt hier auf den Ausdruck

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin[\Theta]^2 \left(1 + \frac{1}{4} \gamma^2 (3 + \cos[2\Theta]) + \dots \right). \quad (6.124)$$

Auch hier erkennt man wieder vor der großen Klammer den klassischen Term der Wurfparabel. Will man für vorgegebene Werte von H und W einer ballistischen Flugbahn den Abgangswinkel Θ und die Abgangsgeschwindigkeit v_0 berechnen, so müssen zunächst die Formeln (6.119) und (6.123) umgeschrieben werden. Wir setzen

$$\gamma = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}; \quad \cos[\Theta] = \frac{v_x}{v_0}; \quad \sin[\Theta] = \frac{v_y}{v_0}; \quad v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \tan \left[\frac{W}{2R} \right] &= \frac{v_x v_y}{gR - v_x^2}, \\ \frac{H}{R} &= \frac{v_y^2}{gR - v_x^2 - v_y^2 + \sqrt{(gR - v_x^2)^2 + v_x^2 v_y^2}}. \end{aligned}$$

Die Wurzel im zweiten Ausdruck kann aber durch die Wurfweite W der ersten Formel eliminiert werden. So erhalten wir vereinfacht

$$\begin{aligned} \tan \left[\frac{W}{2R} \right] &= \frac{v_x v_y}{gR - v_x^2}, \\ \frac{H}{R} &= \frac{v_y^2}{gR - v_x^2 - v_y^2 + v_x v_y \csc \left[\frac{W}{2R} \right]}. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungspaar ist von quadratischer Ordnung in v_x und v_y . Die positive Lösung lautet

$$v_x = \sqrt{\frac{2gR(R+H)}{H+2R \sin \left[\frac{W}{4R} \right]^2}} \sin \left[\frac{W}{4R} \right], \quad (6.125)$$

$$v_y = \sqrt{\frac{2gRH^2}{(H+R) \left(H+2R \sin \left[\frac{W}{4R} \right]^2 \right)}} \cos \left[\frac{W}{4R} \right]. \quad (6.126)$$

Daraus folgt für die Abgangsgeschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR}{R+H} \left(2H+R \left(1 - \frac{H}{H+2R \sin \left[\frac{W}{4R} \right]^2} \right) \right)}. \quad (6.127)$$

Im Grenzfall $W \rightarrow 0$ folgt hieraus einfach

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}}. \quad (6.128)$$

Diese Formel reicht in den meisten Fällen aus, um die maximale kinetische Energie pro Masse einer ballistischen Rakete aus ihrer erreichten *Gipfelhöhe* H ohne Berücksichtigung der Flugweite W abzuschätzen. Diese Formel folgt auch aus (6.100) im Falle $H_b = 0$. Für den Abgangswinkel Θ erhalten wir schließlich

$$\tan[\Theta] = \frac{v_y}{v_x} \equiv \frac{H}{H+R} \cot\left[\frac{W}{4R}\right]. \quad (6.129)$$

Schwieriger ist die Berechnung der Flugzeit. Wir benötigen dazu den Flächensatz der gravitativen Zentralbewegung. Man erhält mit der Randbedingung am Startort der Rakete

$$r[\chi]^2 \frac{d\chi}{dt} = R v_0 \cos[\Theta]. \quad (6.130)$$

Mit der Bahngleichung (6.110) ergibt so zunächst für die Flugzeit das Integral

$$T = 2 \sqrt{\frac{R}{g}} \gamma^3 \cos[\Theta]^3 \int_0^{\varphi/2} \frac{d\chi}{(1 - \epsilon \cos[\chi])^2}. \quad (6.131)$$

Die Auswertung führt zu

$$T = 2 \sqrt{\frac{R}{g}} \left[\frac{2\Phi}{(\sqrt{2-\gamma^2})^3} + \frac{\gamma \sin[\Theta]}{2-\gamma^2} \right], \quad (6.132)$$

wobei die Größe Φ durch

$$\tan[\Phi] = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \tan\left[\frac{\varphi}{4}\right] \quad (6.133)$$

gegeben ist. Die Exzentrizität ϵ folgt aus (6.122), der Winkel φ aus (6.119). Für kleine γ erhalten genähert für die Flugzeit

$$T = 2 \frac{v_0}{g} \sin[\Theta] \left\{ 1 + \frac{1}{6} (5 + \cos[2\Theta]) \gamma^2 + \dots \right\} \quad (6.134)$$

Der erste Term stimmt mit der Wurfparabel wieder überein.

6.8 Die optimale Flugbahn

Die im vorhergehenden Abschnitt entwickelten Formeln gelten für beliebige $\gamma = v_0/\sqrt{gR}$ und beliebige Elevationswinkel Θ . Doch wie bei der Wurfparabel ist auch bei der Raketenballistik über große Entfernungen die Hauptfrage, bei welchem Elevationswinkel Θ unter Voraussetzung konstanter „Brennschlussgeschwindigkeit“ *maximale Flugweite* erreicht wird. Oder anders ausgedrückt: *Bei minimalem Energieaufwand die maximale Zieldistanz erreichen*. Mathematisch bedeutet dies, bei konstanten γ in (6.119) den Elevationswinkel Θ_m maximaler Winkeldistanz φ zu finden. Man erhält sehr einfach das Resultat

$$\tan[\Theta_m] = \sqrt{1 - \gamma^2}; \quad \cos[\Theta_m] = \frac{1}{\sqrt{2 - \gamma^2}}. \quad (6.135)$$

Für $\gamma \rightarrow 0$ folgt wieder das klassische Resultat $\Theta_m = \pi/4$ (45 Grad) von TARTAGLIA und TORRICELLI. Für $\gamma \rightarrow 1$ folgt hieraus $\Theta_m \rightarrow 0$, also horizontale Flugbahn (Kreisbahn) (**Erdsatelliten**). Für die optimale Bahnexzentrizität gilt dann

$$\epsilon_m = \sqrt{1 - \gamma^2}. \quad (6.136)$$

Die dazugehörige maximale Bogenweite um die Erdkugel lautet

$$\sin \left[\frac{\varphi_m}{2} \right] = \frac{\gamma^2}{2 - \gamma^2}. \quad (6.137)$$

Setzt man hier in γ die Anfangsgeschwindigkeit (6.128) ein, so folgt einfach

$$\sin \left[\frac{\varphi_m}{2} \right] = \frac{H}{R}. \quad (6.138)$$

Eine Rakete, die in einem Vertikalaufstieg die Gipfelhöhe H über dem Erdboden erreicht, kann also in einer optimalen ballistischen Flugbahn die Weite W_m

$$W_m = 2R \arcsin \left[\frac{H}{R} \right]$$

(6.139)

längs des Erdumfangs erreichen. Für die koreanische Rakete *Hwasong-15* erhalten wir zum Beispiel mit $H \sim 4475$ km die maximale Weite $W_m \sim 9923$ km - ohne Berücksichtigung der Erdrotation.



Fig. 6.15: Eine ballistische RSM-56 Bulava Rakete nach dem Start aus einem untergetauchten U-Boot der russischen Borei - Klasse. Reichweite bis zu 8500 km. (credit: wikimedia.commons)

Alternativ können wir (6.137) auch

$$\sqrt{\frac{1 - \sin \left[\frac{\varphi_m}{2} \right]}{1 + \sin \left[\frac{\varphi_m}{2} \right]}} = \tan \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_m}{4} \right] = \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (6.140)$$

schreiben. Ein Vergleich mit (6.135) führt auf die bemerkenswerte Relation

$$\boxed{\Theta_m = \frac{\pi - \varphi}{4}}. \quad (6.141)$$

Man kann so für die optimale Flugbahn einer Rakete den Satz aussprechen:

Bei einer optimalen ballistischen Flugbahn einer Interkontinentalrakete muss die Summe aus dem vierfachen Elevationswinkel beim Start und dem Großkreiswinkel vom Startpunkt zum Zielpunkt längs der Erdoberfläche immer 180 Grad betragen.

Die dazugehörige *minimale Geschwindigkeit* folgt aus

$$\gamma_m = \csc \left[\frac{\pi + \varphi}{4} \right] \sqrt{\sin \left[\frac{\varphi}{2} \right]}. \quad (6.142)$$

Für $\varphi \rightarrow \pi$ wird $\Theta_m \rightarrow 0$ und $\gamma_m \rightarrow 1$. Die Antipoden bezüglich des eigenen Standortes sind mit einer ballistischen Rakete also sehr schlecht zu erreichen. Führen wir die Länge der Sehne S

$$S = 2 R \sin \left[\frac{\varphi_m}{2} \right] \quad (6.143)$$

vom Startort zum Zielort ein, so können wir auch

$$v_{0m} = \sqrt{\frac{2 g R S}{2 R + S}} \quad (6.144)$$

schreiben. Die Steighöhe bei einer optimalen Flugbahn beträgt

$$H[\varphi] = \sqrt{2} R \sin \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4} \right] \sin \left[\frac{\varphi}{4} \right] \quad (6.145)$$

Mit der Sehne S ergibt sich dann

$$H[S] = \frac{1}{4} \left(\sqrt{4 R^2 - S^2} - (2 R - S) \right). \quad (6.146)$$

Unter der Schar *optimaler* Flugbahnen mit unterschiedlichen Weiten φ erreicht die Bahn mit $\varphi = \pi/2$ die **absolut größte Steighöhe**. Sie beträgt

$$H[\pi/2] = \sqrt{2} R \sin \left[\frac{\pi}{8} \right]^2 \equiv \frac{R}{2} \left(\sqrt{2} - 1 \right). \quad (6.147)$$

Mit dem Erdradius $R = \mathbf{6371}$ km ergibt sich so für die Maximalhöhe aller optimalen Flugbahnen

$$H[\varphi/2] \approx \mathbf{1319} \text{ km} \quad (6.148)$$

Keine ballistische Rakete sollte eine Flugbahn mit einer größeren Höhe aufweisen. Die Reichweite bei dieser Maximalhöhe entspricht dabei genau 1/4 des Erdumfanges.

Die Gleichung für diese Schar optimaler Keplerbahnen bei vorgegebener Weite W lautet

$$r[\chi] = \frac{R \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)}{1 - \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4} \right) \cos \left(\chi - \frac{\varphi}{2} \right)} \quad (6.149)$$

Der Punkt $\varphi = 0$ ist dabei der idealisierte Abgangsort der Rakete. In Abbildung (6.16) sind einige dieser Bahnbögen graphisch dargestellt.

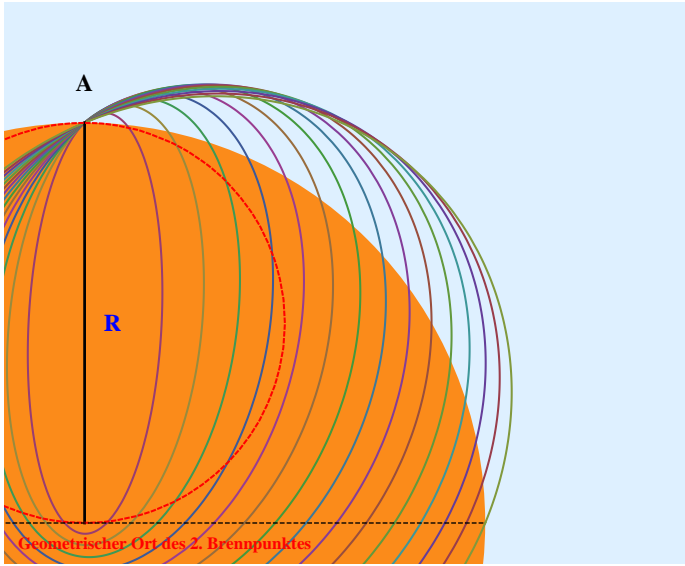


Fig. 6.16: Optimale Flugbahnen einer Interkontinentalrakete für Reichweiten von bis zu 10000 km ($1/4$ Erdumfang). Je weiter das Ziel, desto kleiner ist der optimale Neigungswinkel der Rakete bei Brennschluss.

Es verbleibt noch die Flugzeit der optimalen Bahnen zu berechnen. Aus (6.132) folgt zunächst

$$T = 2 \sqrt{\frac{R}{g}} \left[\frac{2 \arctan \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma} \right) + \gamma \sqrt{1 - \gamma^2}}{(\sqrt{2 - \gamma^2})^3} \right]. \quad (6.150)$$

Die Größe γ hängt mit der optimalen Elevation φ_m bei Brennschluss durch die Relation (6.140) zusammen. Führen wir hier wieder die Länge der Sehne S (6.143) vom Startort zum Zielort ein, so gilt mit Hilfe der hypergeometrischen Funktion alternativ

$$T = \sqrt{\frac{2S}{g}} \left(1 + \frac{S}{2R} \right) {}_2F_1 \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{2S}{2R+S} \right] \quad (6.151)$$

Im Falle $S/R \ll 1$ ist die Sehne S mit der Wurfweite W längs der Erdoberfläche vergleichbar und wir erhalten im Limes das Ergebnis $\sqrt{2W/g}$ für die Flugzeit einer optimalen Wurfparabel mit der Elevation $\Theta = 45^\circ$. Für $S = 2R$ erhält man $H = 0$ und $T = \pi\sqrt{R/g}$, also die halbe Umlaufzeit einer Kreisbahn im Abstand R .

Zahlenbeispiel: Die Oberflächenbeschleunigung g betrage $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, der Erdradius $R = 6.371 \cdot 10^6 \text{ m}$. Mit diesen Daten folgt für die Bahngeschwindigkeit

$$\sqrt{gR} \sim \mathbf{7906 \text{ m/sec.}} \quad (6.152)$$

Setzen wir für den Winkelbogen der Wurfweite $1/4$ Erdumfang an, also $\varphi_m = \pi/2$ oder $W \sim 10000 \text{ km}$, so erhalten wir

$$v_0 \sim \mathbf{7194 \text{ m/sec}} \quad (6.153)$$

Diese Geschwindigkeit muss die Rakete nach Brennschluss der dritten Stufe erreicht haben. Um die Flugzeit zum Ziel zu berechnen, erhalten zunächst für die Zeitkonstante mit den obigen Daten in Sekunden

$$\sqrt{\frac{R}{g}} \sim \mathbf{806 \text{ sec.}} \quad (6.154)$$

Damit folgt für den ganzen Viertelbogen um die Erde

$$T \sim \mathbf{1933 \text{ sec} \equiv 32 \text{ m } 13 \text{ sec}} \quad (6.155)$$

Es dauert also etwas über eine halbe Stunde, bis die Rakete das Ziel erreicht hat. Mit diesen Zahlen hat man in etwa eine Vorstellung von den erforderlichen Geschwindigkeiten und den entsprechenden Zeiträumen. Schon C. CRANZ hat in seinem Lehrbuch von 1910 Teile dieser Probleme etwas umständlich durchgerechnet. An eine Raketenballistik war damals (1910) natürlich noch nicht zu denken. Erst H. OBERTH hat 1929 in seinem Hauptwerk *Wege zur Raumschiffahrt* diese Fragen sehr ausführlich behandelt ([41]). Während seiner Zeit in Peenemünde zu Beginn der 1940er Jahre entwickelte er auch sein Dreistufenkonzept für Raketen mit sehr großen Reichweiten.

Die Idee, mit einer „Riesenkanone“ anstatt einer Mehrstufenrakete ein Objekt in das Weltall zu schießen, hatte schon I. NEWTON. Romanhaft beschrieben wurde es dann von dem französischen Romancier und

W[km]	Θ°	v_0 [m/s]	H[km]	T[min]
1000	42.8	3015	240	7.91
2000	40.5	4111	459	11.70
3000	38.3	4862	655	14.93
4000	36.0	5431	828	17.87
5000	33.8	5880	976	20.62
6000	31.5	6246	1098	23.22
7000	29.3	6548	1195	25.69
8000	27.0	6801	1264	28.01
9000	24.8	7014	1305	30.18
10000	22.5	7194	1319	32.20

Tab. 6.4: Bahndaten von optimalen ballistischen Kurven für zehn verschiedene Reichweiten auf der Erdoberfläche. Schon der Raketenpionier H. OBERTH hat im Jahre 1929 solche Berechnungen veröffentlicht. Die physikalischen Konstanten sind hier wieder $R = 6371$ km und $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Raumfahrt – Träumer *Jules Verne*, der 1865 erstmals eine Reise „von der Erde zum Mond“ beschrieb. Sein Raumgefährt ließ er von einer unterirdischen Riesenkanone in Florida mondwärts schießen. Ende des ersten Weltkrieges wurden von der Firma *Krupp* Geschütze mit überlangen Rohren entwickelt, um Reichweiten von über 100 km zu erlangen. Und um 1965 wurde mit einem amerikanischen „Raumgeschütz“ von 36 Metern Länge von Barbados aus Reichweiten von über 250 km erreicht. Neuere Entwicklungen auf diesem Gebiet sind *Magnetspulenkanonen (coil gun)*, mit denen kleine „Satelliten“ auf Geschwindigkeiten von etwa 5000 m/s gebracht werden können. Ob damit aber schon erfolgreich kleinere Körper in die Erdumlaufbahn gelangen konnten, ist dem Autor nicht bekannt.

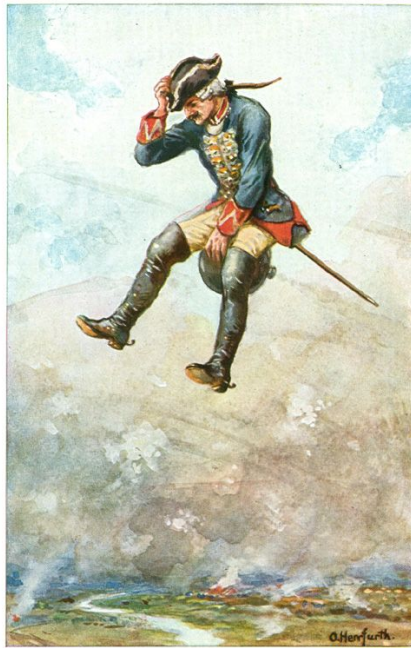
7 Schlussbemerkungen

Der Wunsch, die Erde für kurze Zeit mal zu verlassen, ist schon sehr alt. Dies bezeugt eine Textstelle aus der *antiken Lügengeschichte*, nämlich aus der *Ikaromenippus oder die Luftreise* von LUKIAN VON SAMOSATA (120-180):

Vom Weltraum aus sah ich die Erde ganz außerordentlich klein - ich will sagen, noch kleiner als den Mond – so dass ich mir, wie ich zum erstenmal hinunter guckte, gar nicht vorstellen konnte, wo all die hohen Berge und das so große Weltmeer geblieben wären Aber der Sonnenglanz, der mir aus dem Ozean entgegen-spiegelte, ließ mich schließen, dass das, was ich da sah, die Erde sei.

Das Problem der ballistischen Kurve oder allgemeiner das der Bewegung eines Körpers mit Luftwiderstand und Gravitationsbeschleunigung hat Mathematiker und Militärwissenschaftler der letzten 500 Jahre immer wieder beschäftigt. Als I. NEWTON entdeckte, dass die Bremskraft des Luftwiderstandes in guter Näherung mit dem Quadrat der Geschwindigkeit zunimmt, konnte das Problem dem Differentialkalkül unterworfen werden. Doch eine *exakte einfache Lösung* wie im planetaren Zweikörperproblem der Himmelsmechanik existiert nicht - selbst ein I. NEWTON konnte mit seinen ausgefeilten geometrischen Methoden wenig ausrichten.

In den 1930er Jahren kam dann die Raketenballistik hinzu - natürlich zunächst aus rein militärischen Interessen. Erst Anfang der 1960er Jahre wurde das Problem von Aufstiegsbahnen einer Rakete in einen Erdorbit als Teil einer neuen ballistischen Aufgabe untersucht. Solche Fragestellungen waren einem I. NEWTON oder L. EULER noch völlig unbekannt. Doch der eigentliche Reiz dieser Probleme liegt gerade in ihren Schwierigkeiten und unerwarteten einfachen Lösungen. Es kommt immer wieder darauf an, geschickte neue Approximationsmethoden zu finden. Jeder darf hier seine kreativen Kräfte ausprobieren und kann so dem komplexen Problem immer wieder neue Seiten abgewinnen. Der Mensch wird hier



Münchhausen

O. Herrfurth pinx.

Fig. 7.1: Die witzigen Einfälle oder scherzhaften Erzählungen (Facetien) eines Münchhausen sind heute durch die Mondflüge in gänzlich unerwarteter Form Realität geworden. (Bild: Oscar Herrfurth - Ritt auf der Kanonenkugel)

zum Künstler...er kann hier vielleicht sein eigenes mathematisches *Taj Mahal* (Tadsch Mahal) finden.

Anhang

A.1 Die Lambertsche W - Funktion

Um die Aufstiegsbahn einer Rakete in eine Umlaufbahn oder die Wurfweite einer „Kanonenkugel“ bei einem flachen Elevationswinkel zu berechnen, hat sich die wenig bekannte transzendente W-Funktion $\mathbf{W}[z]$ als sehr nützlich erwiesen. Sie ist definiert durch die äquivalenten Definitionen

$$\eta = \xi e^{\xi}, \quad \xi = \mathbf{W}[\eta], \quad \mathbf{W}[\eta] e^{\mathbf{W}[\eta]} = \eta, \quad \mathbf{W}[\xi e^{\xi}] = \xi, \quad (\text{A.1})$$

wobei ξ, η beliebige komplexe Zahlen darstellen können. Die Funktion wurde zum erstenmal von J.H. LAMBERT und L. EULER betrachtet und spielt in der mathematischen Physik heutzutage eine wichtige Rolle. Im reellen Intervall $x \in [1/e, 0)$ existieren für diese Funktion zwei reelle Zweige, die mit $\mathbf{W}_0[x]$ (oberer Zweig) und $\mathbf{W}_{-1}[x]$ (unterer Zweig) bezeichnet werden. In der Ballistik benötigt man beide Zweige dieser Funktion. Um den Punkt $x = 0$ lautet die Taylorreihe der Funktion $\mathbf{W}_0[x]$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0[x] &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n \\ &\equiv x - x^2 + \frac{3}{2} x^3 - \frac{8}{3} x^4 + \frac{125}{24} x^5 - \dots \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius ist hier $1/e$. Führt man jetzt die zwei Hilfsfunktionen

$$L_1 = \ln[-x]; \quad L_2 = \ln[-\ln[-x]] \quad (\text{A.2})$$

ein, so gilt für die asymptotische Entwicklung der Funktion $\mathbf{W}_{-1}[x]$ im Intervall $x \in [-1/e, -0)$ die Reihe

$$\mathbf{W}_{-1}[x] = L_1 - L_2 + \frac{L_2}{L_1} - \frac{L_2 (2 - L_2)}{2 L_1^2} + \frac{L_2 (6 - 9 L_2 + 2 L_2^2)}{6 L_1^3} - \dots \quad (\text{A.3})$$

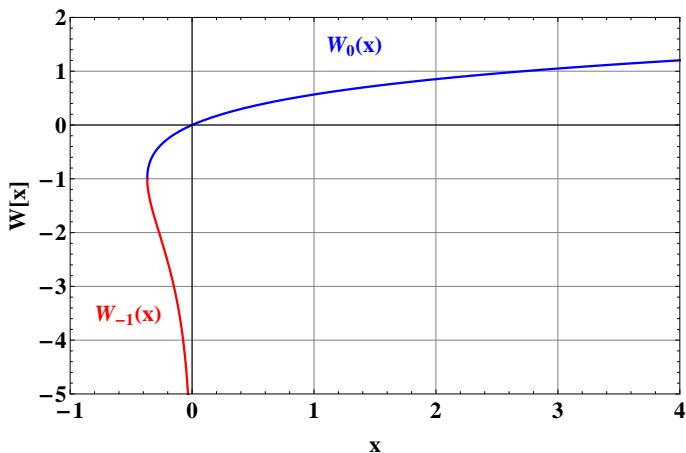


Fig. A.1: Die Lambertsche $W[x]$ - Funktion mit ihren beiden reellen Zweigen.

Die Koeffizienten sind hier *Stirlingsche Zahlen*. Für die Funktion im oberen Zweig gilt analog für $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{W}_0[x] = \ln[x] - \ln[\ln[x]] + \frac{\ln[\ln[x]]}{\ln[x]} - \dots \quad (\text{A.4})$$

Weitere zum Teil bemerkenswerte Details findet man in der Literatur ([17]).

Gerade die Funktion $-\mathbf{W}_0[-x]$ spielt ja bei der analytischen Berechnung einer idealisierten Aufstiegs- und Abstiegsbahn einer Rakete (Mondlandung) eine entscheidende Rolle. In der Literatur wird die Funktion

$$\mathbf{T}[x] = -\mathbf{W}[-x] \quad (\text{A.5})$$

auch die Eulersche T-Funktion genannte. Für die Ableitung gilt die Relation

$$\mathbf{W}_0'[x] = \frac{\mathbf{W}_0[x]}{x(1 + \mathbf{W}_0[x])}.$$

Es gilt speziell um den Punkt $x = 0$ die Taylorreihe der Funktion

$$-\mathbf{W}_0[-x]$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_0[x] = -\mathbf{W}_0[-x] &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} x^n \\ &\equiv x + x^2 + \frac{3}{2} x^3 + \frac{8}{3} x^4 + \frac{125}{24} x^5 + \dots\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius ist auch hier $1/e$. Wir definieren jetzt die Funktionschar

$$f_k[x] = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^{n-k-1}}{n!} x^n$$

mit

$$f_0[x] = -\mathbf{W}_0[-x].$$

Dann gelten die Rekursionen

$$f_{k+1}[x] = \int x^{-1} f_k[x] dx; \quad \{k = 0, 1, 2, \dots\}$$

Im Einzelnen ergibt sich so

$$\begin{aligned}f_1[x] &= -\mathbf{W}_0[-x] - \frac{1}{2} \mathbf{W}_0[-x]^2, \\ f_2[x] &= -\mathbf{W}_0[-x] - \frac{3}{4} \mathbf{W}_0[-x]^2 - \frac{1}{6} \mathbf{W}_0[-x]^3,\end{aligned}$$

Analog gilt auch die Darstellung

$$\begin{aligned}\sqrt{-\mathbf{W}_0[-x]} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(n + \frac{1}{2})^{n-1}}{2 n!} x^{n+\frac{1}{2}} \\ &\equiv x^{1/2} + \frac{1}{2} x^{3/2} + \frac{5}{8} x^{5/2} + \frac{49}{48} x^{7/2} + \dots\end{aligned}$$

Definieren wir die parametrisierte Funktion

$$g_k[x] = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(n + \frac{1}{2})^{n-k-1}}{2^{k+1} n!} x^{n+\frac{1}{2}},$$

dann gelten mit

$$g_0[x] = \sqrt{-\mathbf{W}_0[-x]}$$

die Rekursionen

$$g_{k+1}[x] = \frac{1}{2} \int x^{-1} g_k[x] dx; \quad \{k = 0, 1, 2, \dots\}$$

Im Einzelnen gilt dann zum Beispiel

$$\begin{aligned} g_1[x] &= \sqrt{-\mathbf{W}_0[-x]} \left(1 + \frac{1}{3} \mathbf{W}_0[-x] \right), \\ g_2[x] &= \sqrt{-\mathbf{W}_0[-x]} \left(1 + \frac{4}{9} \mathbf{W}_0[-x] + \frac{1}{15} \mathbf{W}_0[-x]^2 \right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Entwicklungen ist es im Prinzip möglich, die analytischen Reihenkoeffizienten der Aufstiegsbahn einer Rakete nach $\alpha \equiv a_s/g$ exakt durch rationale Zahlen auszudrücken.

A.2 Der Satz von Cranz

Wahrscheinlich ist der Begriff „Satz von Cranz“ historisch nicht ganz richtig, aber in seinem Lehrbuch von 1910 hat C. CRANZ einen elementaren Lehrsatz über die Lage des zweiten Brennpunktes von einer Schar von Keplerellipsen ausgesprochen, die dadurch entstehen, daß Körper mit steigender Geschwindigkeit immer in der gleichen Richtung von einer Planetenoberfläche abgeschossen werden. Man kann diesen Sachverhalt mit den Formeln (6.119) und (6.122) verstehen. Der eine Brennpunkt liegt im Erdmittelpunkt, der andere Brennpunkt hat dann vom Erdmittelpunkt mit $\gamma = v_0/\sqrt{gR}$ den Abstand

$$2a\epsilon \equiv \frac{2\sqrt{1 - (2 - \gamma^2)\gamma^2 \cos^2[\Theta]}}{2 - \gamma^2} R \quad (\text{A.6})$$

Legt man der Figur (A.2) ein Koordinatensystem mit dem Ursprung im Erdmittelpunkt (0,0) (erster Brennpunkt der Ellipsen) zugrunde, so lauten die Koordinaten des zweiten Brennpunktes zunächst

$$x_2 = 2a\epsilon \sin[\varphi/2], \quad y_2 = 2a\epsilon \cos[\varphi/2] \quad (\text{A.7})$$

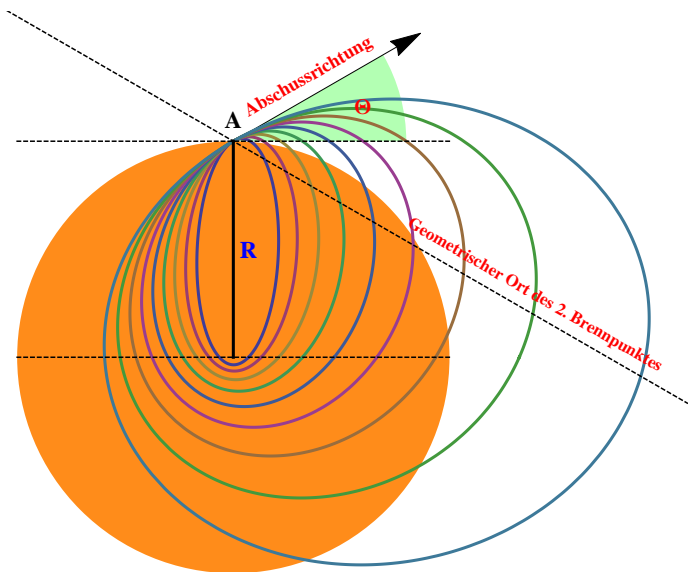


Fig. A.2: Der zweite Brennpunkt aller Keplerellipsen, die unter gleichem Winkel Θ mit steigender Geschwindigkeit vom Punkt **A** abgeschossen wurden, liegen auf einer geraden Linie, die durch den Abschussort geht und die Steigung $-\cot(2\Theta)$ hat.

Wegen (6.119) gilt aber

$$\begin{aligned}\sin[\varphi/2] &= \frac{\gamma^2 \sin(2\Theta)}{2\sqrt{1 - (2 - \gamma^2)\gamma^2 \cos[\Theta]^2}} \\ \cos[\varphi/2] &= \frac{1 - \gamma^2 \cos[\Theta]^2}{\sqrt{1 - (2 - \gamma^2)\gamma^2 \cos[\Theta]^2}}\end{aligned}$$

Mit dem obigen Resultat ergibt sich so

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{\gamma^2 \sin(2\Theta)}{2 - \gamma^2} R \\ y_2 &= \left(1 - \frac{\gamma^2 \cos(2\Theta)}{2 - \gamma^2}\right) R\end{aligned}$$

Durch Elimination von γ ergibt sich so für den geometrischen Ort des zweiten Brennpunktes der Ellipsenschar die Geradengleichung

$$\boxed{y_2 = R - \cot(2\Theta) x_2} \quad (\text{A.8})$$

In der Figur (A.2) ist die Situation für den Elevationswinkel $\Theta = \pi/6$ dargestellt.

Den Satz von CRANZ kann man natürlich auf die optimalen Flugbahnen erweitern. Da dann der Abschusswinkel Θ selbst eine Funktion des Geschwindigkeitsverhältnisses $\gamma = v_0/\sqrt{gR}$ ist, folgt nun

$$x_2 = \frac{2\gamma^2 \sqrt{1-\gamma^2}}{(2-\gamma^2)^2} R; \quad y_2 = \left(1 - \frac{\gamma^4}{(2-\gamma^2)^2}\right) R \quad (\text{A.9})$$

Daraus folgt natürlich sofort

$$\boxed{x_2^2 + \left(y_2 - \frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2} \quad (\text{A.10})$$

Der geometrische Ort des zweiten Brennpunktes aller optimalen Bahnen ist somit ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf halber Strecke zwischen Erdzentrum und Abschussort liegt, und dessen Radius dem halben Erdradius entspricht.

A.3 Das ballistische Integral

Im Text wurde der Abstand der senkrechten Asymptote der idealen ballistischen Kurve vom Abgangsort (siehe Fig.1.2) durch das Integral (4.35) (quadratisches Luftwiderstandsgesetz)

$$W_A = \frac{v_0^2}{g} \int_{-\tan[\Theta]}^{\infty} \frac{\cos[\Theta]^2 dp}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 [\mathbf{f}(\tan[\Theta]) + \mathbf{f}[p]]} \quad (\text{A.11})$$

dargestellt. Für $k = 0$ ist dieser Abstand natürlich unendlich, weil eine Wurfparabel *keine senkrechte Asymptote besitzt*. Man kann versucht sein, dieses Integral durch Verschiebung des Integrationsweges in die

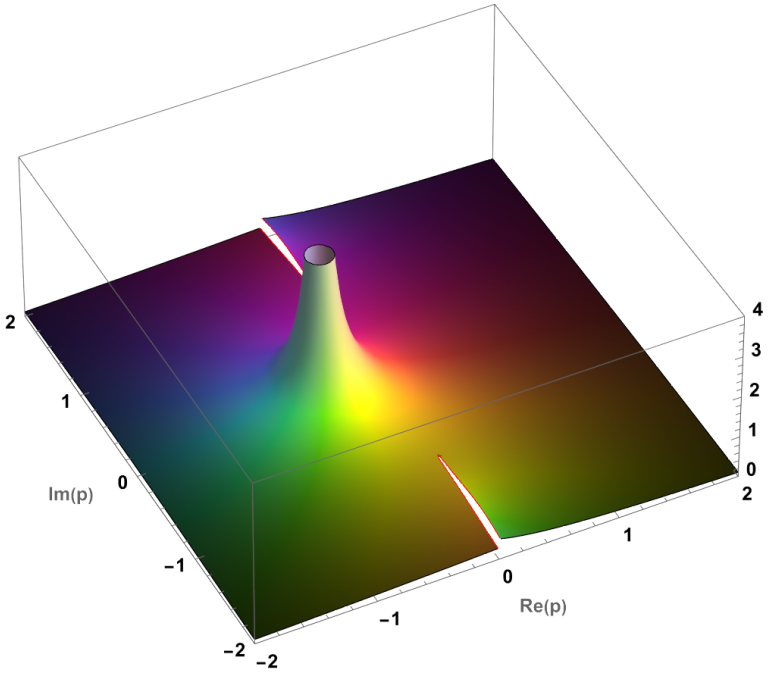


Fig. A.3: Das Verhalten der Funktion $|\mathbf{F}[p]|$ in der komplexen p - Ebene für $k v_0^2/g = 1$ und $\Theta = 0$. Auf der negativen reellen Achse existiert eine Polstelle, auf der imaginären Achse hat die Riemannsche Fläche einen Verzweigungsschnitt.

komplexe Zahlenebene p zu vereinfachen oder gar durch Residuenbildung an Polstellen zu berechnen. Es kommt hier also auf die Funktion

$$\mathbf{F}[p] = \frac{\cos[\Theta]^2}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \cos[\Theta]^2 [\mathbf{f}(\tan[\Theta]) + \mathbf{f}[p]]} \quad (\text{A.12})$$

mit

$$\mathbf{f}[p] = p \sqrt{1 + p^2} + \ln[p + \sqrt{1 + p^2}] \quad (\text{A.13})$$

an. Beim Ausklinken einer Fliegerbombe ist $\Theta = 0$ und die asymptotische horizontale Flugweite ist dann

$$W_A = \frac{v_0^2}{g} \int_0^\infty \frac{dp}{1 + \frac{k v_0^2}{g} \mathbf{f}[p]} \equiv \frac{v_0^2}{g} \mathbf{w}[\nu] \quad (\text{A.14})$$

mit der Funktion

$$\mathbf{w}[\nu] = \int_0^\infty \frac{dp}{1 + \nu \mathbf{f}[p]} \quad (\text{A.15})$$

und dem einzigen Parameter $\nu = k v_0^2/g$. In Fig. (A.4) ist die Abhängigkeit der Weite von ν deutlich zu sehen.

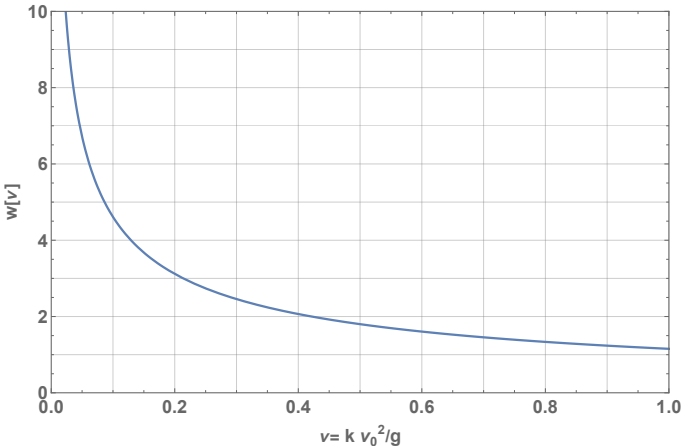


Fig. A.4: Die horizontale Weite $|\mathbf{w}[\nu]|$ einer ballistischen Kurve mit $\Theta = 0$ in Abhängigkeit des Parameters $\nu = k v_0^2/g$.

A.4 Optimierung von Stufenraketen

Die Physik des Raketenantriebes und des Raketendesigns gehört eher in das Gebiet der *inneren Ballistik* beispielsweise der *Ingenieurwissenschaften*. Aus historischen Gründen soll hier aber kurz das Problem

des *optimalen Designs* von Stufenraketen behandelt werden, welches als Erster HERMANN OBERTH in seinem Buch von 1929 für eine einstufige Rakete und im Jahre 1941 in Peenemünde für eine mehrstufige Rakete durchgeführt hat.

Vernachlässigt man der Einfachheit halber die Gravitation und den Luftwiderstand, so gilt nach dem russischen Raketenpionier KONSTANTIN EDUARDOWITSCH ZIOLKOWSKI (1857-1935) für die Geschwindigkeit v einer Rakete die Formel

$$v = c_s \ln \left[\frac{m_Z}{m_B} \right]. \quad (\text{A.16})$$

Die Größe c_s bedeutet hier die Ausstoßgeschwindigkeit der Triebwerksgase, m_Z die Gesamtmasse der Rakete bei der Zündung und m_B die Masse der Rakete bei Brennschluss. Wenn jetzt eine *einstufige* Rakete eine bestimmte Geschwindigkeit erreichen soll, muss bei vorgegebenen c_s das Massenverhältnis m_Z/m_B einen bestimmten Wert haben. Physikalisch kann man fragen, wie hoch der Wirkungsgrad einer *einstufigen* Rakete ist. Unter Wirkungsgrad verstehen wir hier das Verhältnis der aufgewendeten Energie im Triebwerk zur erreichten Bewegungsenergie der ausgebrannten Restrakete (Nutzlast + Struktur) bei Brennschluss ist. Für den aufgewendeten Energieanteil E_1 der Triebwerke nehmen wir genähert die kinetische Energie der ausgestoßenen Gasmasse. Es gilt

$$E_1 = \frac{1}{2} (m_Z - m_B) c_s^2. \quad (\text{A.17})$$

Die kinetische Energie E_2 der Rakete bei Brennschluss ist dagegen

$$E_2 = \frac{1}{2} m_B c_s^2 \ln \left[\frac{m_Z}{m_B} \right]^2. \quad (\text{A.18})$$

Der Wirkungsgrad Q einer *einstufigen* Rakete ergibt sich so zu

$$Q = \frac{m_B \ln \left[\frac{m_Z}{m_B} \right]^2}{m_Z - m_B}. \quad (\text{A.19})$$

Definieren wir das Massenverhältnis

$$p = \frac{m_B}{m_Z}, \quad (\text{A.20})$$

so gilt auch

$$Q[p] = \frac{p \ln [p]^2}{1 - p}. \quad (\text{A.21})$$

Die Grenzwerte sind $Q[0] = Q[1] = 0$. Dazwischen muss also ein Optimum für den so definierten Wirkungsgrad liegen. Eine exakte Rechnung liefert

$$\begin{aligned} p_m &= -\frac{1}{2} \mathbf{W}_0 [-2 e^{-2}], \\ &= \mathbf{0.20318} \dots \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

wobei $\mathbf{W}_0[\xi]$ die Lambertsche Funktion des oberen Zweiges bedeutet. Der eigentliche Wirkungsgrad ergibt sich so zu

$$\begin{aligned} Q[p_m] &= -\mathbf{W}_0 \left[-\frac{2}{e^2} \right] \left(2 + \mathbf{W}_0 \left[-\frac{2}{e^2} \right] \right), \\ &= \mathbf{0.64761} \dots \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Das optimale Geschwindigkeitsverhältnis liegt jetzt bei

$$\frac{v}{c_s} = 2 + \mathbf{W}_0 \left[-\frac{2}{e^2} \right] \sim \mathbf{1.59362} \dots \quad (\text{A.24})$$

Der energetische Wirkungsgrad einer einstufigen Rakete kann also in dieser Form knapp 65% erreichen. Die Endgeschwindigkeit beträgt etwas mehr als das Anderthalbfache der Ausströmgeschwindigkeit c_s .

Will man jetzt höhere Endgeschwindigkeiten erreichen, muss man Mehrstufenraketen verwenden. Historisch ist dabei bemerkenswert, dass die älteste bis heute bekannte Beschreibung einer Mehrstufenrakete schon aus dem Jahre 1559 herrührt¹. Sie stammt von dem Militärtechniker und Raketenpionier CONRAD HAAS (1509 - 1576), der im Jahre 1551 mit der Armee des Römisch-deutschen Königs Ferdinand I. als Zeugwart und Büchsenmeister nach Hermannstadt in Siebenbürgen (rumänisch Sibui, ungarisch Nagyszeben) kam und dort aufgrund der Türkeneinfälle die Leitung des Kriegsarsenals übernahm. Zwischen 1529 und 1559 ergänzte

¹Doru Todericiu: *Preistoria Rachetei Moderne*. Manuscrisul de la Sibiu 1529-1569, Editura Academiei RSR, Bucursti, 1969

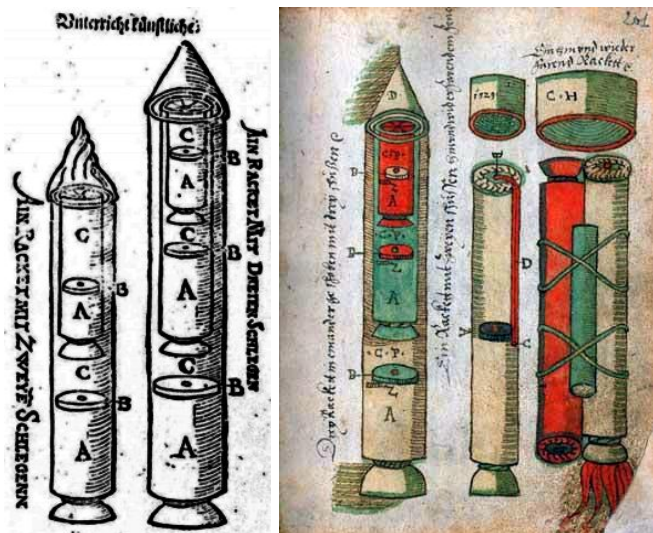


Fig. A.5: Dreistufiges Raketendesign von CONRAD HAAS aus dem Jahre 1559, gezeichnet in einem Kunstbuch aus Hermannstadt in Siebenbürgen. Das Buch wurde erst 1961 in einem Archiv (Staatsarchiv Sibiu, Varia II 374) entdeckt. Danach wurde die dreistufige Rakete erst wieder 1650 von dem polnisch-litauischen Waffenkonstrukteur CASIMIR SIMIENOWICZ beschrieben. (Quelle: wikimedia.commons)

er das von seinem Vorfahren HANS HAASENWEIN geerbte - zwischen 1450 und Mai 1459 angelegte Feuerwerksbuch von 1420, welches er den Titel Kunstbuch gab (Staatsarchiv Sibiu, Varia II 374), um wesentliche Teile². Kurios mutet es heute an, dass auch H. OBERTH gebürtig aus Hermannstadt in Siebenbürgen stammte.

Bei der theoretischen Betrachtung wollen wir die Stufenaufteilung so verstehen, dass von der *Spitze der Rakete* die Stufenzahlen von $N, N - 1, N - 2, \dots, 2, 1$ nach unten gezählt werden. Die *erste* Stufe beinhaltet so die gesamte Rakete. Zur theoretischen Beschreibung dieser Stufenrakete mit N Stufen müssen jetzt drei Massenverhältnisse p_n, q_n, s_n für jede

²Hans Barth: *Conrad Haas - Raketenpionier und Humanist*, Johannis Reeg Verlag, Heilbronn 2005, 94 Seiten.

Teilstufe $n = 1, 2, \dots, N$ definiert werden. Es gilt

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{m_{B,n}}{m_{Z,n}} = \frac{\text{Masse bei Brennschluss der Stufe } n}{\text{Masse bei Zündung der Stufe } n} \\ q_n &= \frac{m_{L,n}}{m_{Z,n}} = \frac{\text{Masse der Nutzlast der Stufe } n}{\text{Masse bei Zündung der Stufe } n} \\ s_n &= \frac{m_{S,n}}{m_{Z,n}} = \frac{\text{Masse der Struktur der Stufe } n}{\text{Masse bei Zündung der Stufe } n} \end{aligned}$$

Für die Größe q_n gilt auch

$$q_n = \frac{m_{Z,n+1}}{m_{Z,n}} = \frac{\text{Masse bei Zündung der Stufe } n+1}{\text{Masse bei Zündung der Stufe } n}$$

Die Gesamtmasse der Stufenrakete beim Start wäre dann $m_{Z,1}$. Es gelten außerdem die beiden alternativen Randbedingungen

$$m_{B,n} = m_{L,n} + m_{S,n} \quad (\text{A.25})$$

$$m_{S,n} = m_{B,n} - m_{Z,n+1} \quad (\text{A.26})$$

und daher die wichtige Relation

$$\boxed{p_n = q_n + s_n} \quad (\text{A.27})$$

Bei der Optimierung einer N -Stufenrakete kommt es im wissenschaftlichen wie ökonomischen Bereich darauf an, das Verhältnis aus der Nutzlast der letzten Stufe zur Gesamtmasse der Rakete beim Start zu maximieren. Für die Nutzlast der letzten Stufe gilt aber jetzt

$$\begin{aligned} m_{L,N} &= q_N m_{Z,N} \\ &= q_N q_{N-1} m_{Z,N-1} \\ &= q_N q_{N-1} q_{N-2} m_{Z,N-2} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Daraus folgt für das zu maximierende Verhältnis

$$\mathbf{F} = \frac{m_{L,N}}{m_{Z,1}} = \prod_{n=1}^N q_n \quad (\text{A.28})$$

Unter der Voraussetzung, dass die Strahlgeschwindigkeit c_s aller Triebwerke gleich ist, gilt für die Endgeschwindigkeit der Rakete (ohne Gravitation und Luftwiderstand)

$$\begin{aligned} v_0 &= -c_s \ln \left[\prod_{n=1}^N p_n \right] \\ &= -c_s \sum_{n=1}^N \ln[q_n + s_n] \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Diese Endgeschwindigkeit geht als Nebenbedingung in das Extremwertproblem ein. Das zu maximierende Funktional lautet also

$$\mathbf{F} = \prod_{n=1}^N q_n + \lambda \sum_{n=1}^N \ln[q_n + s_n], \quad (\text{A.30})$$

wobei λ ein *Lagrangescher Multiplikator* darstellt. Die Strukturgrößen s_n sind dabei durch die Konstruktion vorgegeben. Gesucht wird ein Satz optimaler q_n Werte. Partielle Differentiation nach den q_n Werten liefert für jedes n die Bedingung

$$q_n \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_n} = \prod_{n=1}^N q_n - \lambda \frac{q_n}{q_n + s_n} \equiv 0! \quad (\text{A.31})$$

Daraus folgt unmittelbar die Identität der Verhältnisse

$$\frac{s_1}{q_1} = \frac{s_2}{q_2} = \dots = \frac{s_N}{q_N} \equiv \text{konstant}$$

Dies bezeichnet man auch als die *Gewichtsähnlichkeit einer optimierten Stufenrakete* mit identischen Strahlgeschwindigkeiten. Es ist jetzt sicherlich sinnvoll, für alle Stufen

$$\begin{aligned} q_1 = q_2 = \dots = q_N &\equiv q; \\ s_1 = s_2 = \dots = s_N &\equiv s; \end{aligned}$$

zu setzen. Durch Konstruktionsbedingungen und aus Stabilitätsgründen ist der Parameter s in den meisten Fällen auf $s \sim 1/10$ festgelegt.

Der zu optimierende Parameter ist somit q mit $0 < q + s < 1$. Die Raketengleichung lautet jetzt vereinfacht

$$v_0 = -N c_s \ln[q + s] \quad (\text{A.32})$$

Auflösen nach der Stufenzahl und Einsetzen in (A.28) führt zu dem logarithmierten Funktional

$$\ln(\mathbf{F}) = -\frac{v_0}{c_s} \frac{\ln[q]}{\ln[q + s]}, \quad (\text{A.33})$$

welches durch Variation von q maximiert werden muss. Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Extremum $q \rightarrow q[s]$ lautet

$$(q + s)^{q+s} = q^q \quad (\text{A.34})$$

Diese Bestimmungsgleichung für eine optimale Unterteilung einer Stufenrakete wurde zum erstenmal von HERMANN OBERTH im Jahre 1941 in Peenemünde abgeleitet und diskutiert. Ende 1945 erschien ein persönlicher Bericht in englischer Übersetzung an die Amerikanische Kommission, in der es unter anderem hieß:³

I have investigated these questions in 1941 (as far as I know I am the only one) in precise mathematical form and expressed my views in a confidential report of 37 pages: „On the Best Division of Step - aggregates“. Fourteen copies of the report, which was countersigned by the chief of the Peenemünde Project Division, graduate engineer Roth⁴, appeared at that time. Several copies were burned during the 1943 bombing attack, the rest remained in Peenemünde...⁵

³David Myhra: Hermann Oberth - One of the Fathers of Rocketry. Published by R.C. Walters RCW Technology Sales & Services Inc. 15082 Iona Lakes Drive, Florida 33908, (2013)

⁴LUDWIG ROTH (1909-1967) war deutsch - amerikanischer Ingenieur und Projektleiter des Peenemünder Büros für Zukunftsprojekte - verantwortlich insbesondere für Stufenraketen wie dem Aggregat A9/A10/A11 und A12, die als Vorlage zur späteren Entwicklung der Saturn 5 AS(501) dienten.

⁵Der 23 seitige Bericht wurde am 4. Oktober 1945 von REYNOLD DREYER ins Englische übersetzt und erschien unter dem Titel: „The Design of a Long - Range Rocket“ .

Die transzendente Gleichung (A.34) lässt sich numerisch oder durch eine Potenzreihe nach dem Strukturparameter s lösen. Betrachtet man die Taylorreihe nach dem Parameter s

$$(q + s)^{q+s} - q^q = q^q (1 + \ln[q]) s + O[s]^2,$$

so ergibt sich in niedrigster Ordnung in s die Grenze $q = 1/e$; gültig für sehr kleine Strukturparameter s . Die Größe e bezeichnet hier die Eulersche Zahl mit $\ln[e] = 1$. Genauer gilt

$$q[s] = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{2} e s + \frac{1}{24} (e s)^2 + \frac{1}{1920} (e s)^4 + \frac{13}{580608} (e s)^6 + \dots \right) \quad (\text{A.35})$$

Numerische Rechnungen zeigen, dass $q[s]$ mit steigendem s stetig abfällt und bei $s = 1$ den asymptotischen Grenzwert null erreicht. Außerdem gilt $q[1/4] = 1/4$. In der Umgebung dieses kritischen Punktes gilt dann die Entwicklung

$$q[s] = \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{\ln[2]} \right) \left(s - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

Auch gilt für die Umkehrung von (A.34) nach s

$$q + s = \exp [\mathbf{W}_0[q \ln q]]. \quad (\text{A.36})$$

Für ein optimiertes q lässt sich so der dazugehörige Strukturparameter s ableiten. Die optimierte Stufenzahl N der Rakete ergibt sich mit (A.32) zu

$$N = -\frac{v_0}{c_s} \frac{1}{\ln[q + s]} \quad (\text{A.37})$$

oder als Reihenentwicklung

$$N = \frac{v_0}{c_s} \left(1 + \frac{1}{2} e s + \frac{1}{6} (e s)^2 + \frac{1}{16} (e s)^3 + \frac{1}{45} (e s)^4 + \dots \right) \quad (\text{A.38})$$

Die Stufenzahl hängt also im Wesentlichen von der zu erreichenden Endgeschwindigkeit v_0 ab, die mit Gravitation und Luftwiderstand noch nach „Oben“ korrigiert werden muss. Die Zahl wird im Allgemeinen nicht ganzzahlig sein. Dies macht die Einführung von sogenannten *Boostern* (*Verstärkern, Hilfsraketen*) sinnvoll, die mit der ersten Stufe gleichzeitig gezündet werden, aber eher abgeschaltet werden. In diesem Sinne wäre die *Ariane 5* eine 2.5 stufige Rakete.

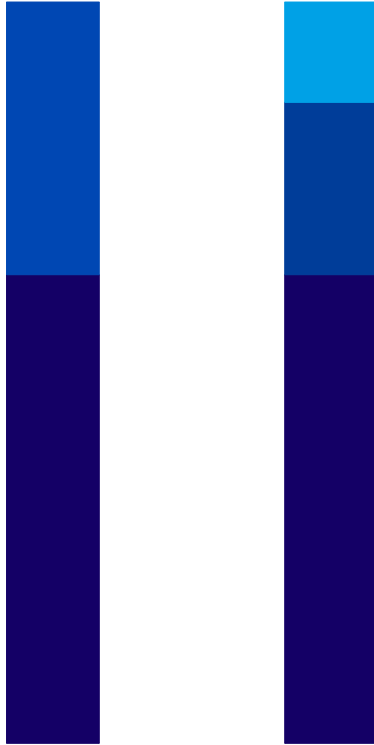


Fig. A.6: *Optimale Massenaufteilung einer zweistufigen und dreistufigen Rakete im Grenzfall $s = 0$, also vernachlässigbarer Strukturmasse. Auffällig ist bei der dreistufigen Variante, wie massiv die erste Stufe gegenüber den anderen Stufen sein muss.*

Um die *gestapelten Einzelmassen* der einzelnen Stufen zu berechnen, setzen wir die Gesamtmasse $m_{Z,1}$ der Rakete beim Start gleich M . Dann

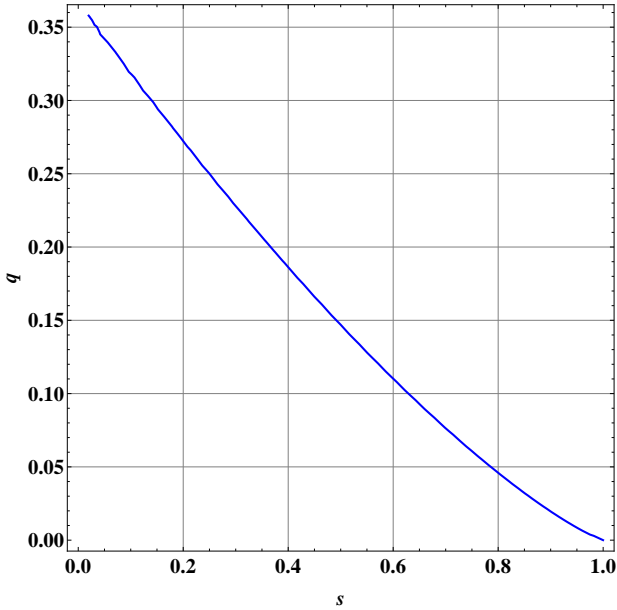


Fig. A.7: Die Funktion $q \rightarrow q[s]$ bei der Optimierung von Raketenstufen, berechnet nach (A.34).

gilt mit den obigen Definitionen

$$\begin{aligned}
 m_1 &= (1 - q) M \\
 m_2 &= q (1 - q) M \\
 \dots &= \dots \\
 m_{N-1} &= q^{N-2} (1 - q) M \\
 m_N &= q^{N-1} M
 \end{aligned}$$

Es ist hier interessant, die obigen Formeln mit den damaligen Design-Daten der **Saturn V AS(501)** aus den 1960er Jahren zu vergleichen. Die erste Stufe hatte mit vollen Tanks eine Gesamtmasse von etwa $m_1 \sim \mathbf{2145}$ Tonnen, die zweite Stufe $m_2 \sim \mathbf{479}$ Tonnen und die dritte Stufe $m_3 \sim \mathbf{117}$ Tonnen. Die vierte Stufe (Nutzlast) bestand im Wesentlichen aus dem *Apollo Service Modul* und der *Mondfähre*, die jeweils eine Masse von **25** und **15** Tonnen hatten. Man kann also genähert $m_4 \sim \mathbf{40}$

Tonnen annehmen. Für die Gesamtmasse der Rakete ergibt sich so die Abschätzung $M \sim \mathbf{2781}$ Tonnen. Diese Daten entsprechen recht gut einem q-Wert knapp unterhalb von $q \sim 1/4$ und knapp oberhalb von $s \sim 1/4$.

Unabhängig von der Stufenzahl einer *optimierten Rakete* ergibt sich im Grenzfall eines sehr kleinen Strukturparameters der genäherte universelle Ausdruck

$$\begin{aligned} m_n &\sim e^{-n+1} (1 - e^{-1}) M \\ n &= \{1, 2, \dots, N - 1\} \end{aligned} \tag{A.39}$$

und für die letzte Stufe

$$m_N \sim e^{-N+1} M. \tag{A.40}$$

Die Summe aller Einzelstufen m_n ergibt natürlich immer die Gesamtmasse M . In Fig. (A.6) sind für $N = 2$ und $N = 3$ die Massenaufteilungen der einzelnen Stufen für den obigen Spezialfall $s = 0$ anschaulich geometrisch dargestellt.

Literaturverzeichnis

- [1] Allen, H. J. & A.J. Eggers, Jr. : *A study of the motion and aerodynamic heating of ballistic missiles entering the Earth's atmosphere at high supersonic speeds*. Classified document TN **4047**, 1951; dann TR **1381**, Ames Aeronautical Laboratory, Moffett Field, Calif., 1958
- [2] Allen, H.J., Eggers, A.J. & S.E. Neice: : *A Comparative Analysis of the Performance of Long-Range Hypervelocity Vehicles*. NACA-TR-1382 Report, January 1958
- [3] Anderson, Robert: *Art of Gunnery*, London, 1674.
- [4] Arcy, Patrick von. *Versuch einer Theorie der Artillerie*, Nancy. übersetzt von J.H. Lambert, Dresden 1766
- [5] Bernoulli, Johann: *Opera Omnia* Tom. I, pag. 514, Tom II, pag. 399. *De motu corporum, gravium, pendulorum, et projectilium in medii non resistentibus, supposita gravitate uniformi et non uniformi*, 1719
- [6] Bernoulli, Johann: *Responsio ad nonneminis provocationem, ejusque solutio quaestionis ipsi ab eodem propositae, de invenienda linea curva quam describit projectile in medio resistente*. Acta Eruditorum Maji, pp. 216-226, 1719
- [7] Bezout, Etienne: *Cours complet de mathematiques e l'usage de la marine et de l'artillerie* 6 Vols. Paris: Bachelier, (1770-1782)
- [8] Blondel, Nicolas Francois: [L' Art de jetter les bombes](#). Paris 1683. Deutsch: *Die Kunst Bomben zu werfen, Das ist: Neu-ausgefundene Art die Weiten und Höhen der Würffe und Bogen-Schüsse, nach allerhand Elevationen der Stücke oder Böller zu finden*. Nürnberg 1686.
- [9] de Borda, J.C.: *Sur la courbe decrite par les boulets & les bombes, en egard a la resistance de l'air*. In: Histoire de l'Académie

Royale des Sciences ; Année M. DCCLXIX ; Avec les M'emoires de Math'ematique & de Physique de la meme Année, Tirés des Registres de cette Académie, pp. 116-121. L'Imprimerie Royale, Paris 1772

- [10] Busca, Gabriello, 1584: *Instruttione de bombardieri*, (1584). Wahrscheinlich das Erste Artilleriebuch für den Dienstgebrauch [Spaulding1937, p. 98]
- [11] Charbonnier, P.J.: *Traite de Balistique exterieure* (2 vols.) Paris: Doin & Gauthier-Villars 1904-1927
- [12] Charbonnier, Prosper-Jules (1852-1936): *Essais sur l'histoire de la balistique; extrait du Memorial de l'artillerie francaise*. Paris, 1928. Dieses Buch erhielt 1929 den Binoux Preis für Geschichte und Philosophie der Wissenschaften von der Pariser Akademie der Wissenschaften.
- [13] Chyba, C., Thomas, P. & Zahnle, K.: *The 1908 Tunguska explosion: atmospheric disruption of a stony asteroid*. *Nature* **361**, 40-44 (1993). <https://doi.org/10.1038/361040a0>
- [14] Congreve, W. 1827: [A Treatise on the General Principles, Powers and Facility of Application of the Congreve Rocket System, as Compared with Artillery](#). London, Printed for Longman, Rees, Orme, Brown, and Greene, Paternoster-Row, 1827
- [15] Cranz, C.J. 1898: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, 18. Ballistik. Leipzig 1898.
- [16] Cranz, Carl Julius: [Lehrbuch der Ballistik I/II/III](#). (1910 - 1927) mehrere Auflagen; Ergänzungen 1936. Springer Verlag. *Carl Cranz (1859 - 1945) gilt als Begründer der modernen Ballistik. Insbesondere die innere Ballistik, die Kreiseldynamik rotierender Geschosse und die Hochgeschwindigkeits - Photographie wurden von ihm begründet.*
- [17] Corless, R.M., Gonnet, G.H., Hare, D.E.G., Jeffrey, D.J. and D.E. Knuth: *On the Lambert W Function*. *Advances in Computational Mathematics* **5**, 329 - 359, (1996).
- [18] Didion, Isidor.: [Traite de balistique](#) Deuxieme Edition, Paris 1860; *Isidor Didion (1798 - 1878) war französischer General. Die Erstausgabe des Buches erschien 1848 und kann als erstes Standardwerk der*

analytischen Ballistik bezeichnet werden. Die Differentialgleichung dritter Ordnung für das eingeschränkte Problem steht hier auf Seite 86.

- [19] Drach, Jules Joseph: [L'équation différentielle de la balistique extérieure et son intégration par quadratures](#). Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **37**, 1-94.
- [20] Euler, Leonhard, *Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta*, (Meditation on experiments made recently on the firing of cannon), Opera Postuma 2, 1862, pp. 800-804; reprinted Opera Omnia, Series 2, Volume 14, pp. 468-477. E853.
- [21] Euler, Leonard.: [Neue Grundsätze der Artillerie enthaltend die Gewalt des Pulvers nebs einer Untersuchung über den Unterschied des Widerstands der Luft in schnellen und langsamen Bewegungen](#). Aus dem Englischen des Herrn *Benjamin Robins* übersetzt und mit den nötigen Erläuterungen und vielen Anmerkungen versehen. Berlin, Haude, 1745.
- [22] Euler, L. *Recherches sur la veritable courbe que decrivent les corps jettes dans l'air ou dans un autre fluide quelconque*, Memoires de l'Academie royale des Sciences de Berlin Tome **IX**, 1755, pp. 321-352.
- [23] Gauß, C.F.: [Gauß Werke, Band 11/1](#), pp. 49-53, Göttingen 1927
- [24] Grävenitz, Henning Friedrichs von, 1764: [Akademische Abhandlung von der Bahn von Geschützkugeln, nebst praktischen Tabellen und Regeln die Schussweiten zu finden](#). Von *Wenceslaus Johann Gustav Karsten* begleitet. Rostock: Röse, 1764. Diese Arbeit stellt in der Geschichte ein Kuriosum dar, denn hier werden mit siebenstelliger (!) Genauigkeit ballistische Bahnkurven berechnet und tabelliert. Lambert hat mit Hilfe dieser Tafeln sein „Echelle ballistique“ gezeichnet.
- [25] Hennert, J.P. 1796: [Dissertations sur la fortification permanente, la fortification de campagne, et la portee des Bombes. Avec un Plan d'instruction pour les officiers.](#), Utrecht: Wild & Altheer, 1796
- [26] Heydenreich, W.: *Die Lehre vom Schuss und die Schusstafeln*, Abteilungen **I/II**. Königliche Hofbuchhandlung, Kochstrasse 68-71, Berlin 1898.

- [27] Lagrange, J.L.: *Memoire sur la theorie generale de la variation des constantes arbitraires dans tous les probl'emes de la mecanique.* Memoires de l'Institut national, classe des Sciences mathematiques et physiques **9**, 257-302, (1809), reprinted in OEuvres, VI, pp. 771-804
- [28] Lambert, J.H.: [Memoire sur la resistance des fluides avec la solution du probleme ballistique.](#) Memoires de l'Academie royale des sciences de Berlin Tome **XXI**, anne 1765/1767, 102-188
- [29] Lambert, J.H.: [Anmerkungen über die Gewalt des Schießpulvers und den Widerstand der Luft, auf Veranlassung der von den Herrn Robins und Herrn Ritter d'Arcy darüber angestellten Versuchen.](#), Dresden 1766, in der Waltherische Hof - Buchhandlung
- [30] Lambert, J.H.: [Construction d'une échelle ballistique](#), Nouveaux Mémoires de L'Académie Royale, 1767
- [31] Legendre, A.M.: *Dissertation sur la question de ballistique proposee par l'Academie royale des sciences et belles-lettres de Prusse pour le prix de 1782.* G. J. Decker, Berlin, (1782)
- [32] Littlewood, J.E. (1953): [A Mathematician's Miscellany](#). Methuen & CO. LTD. London. 36 Essex Street, Strand, W.C. 2
- [33] Mandryka, Aleksei Petrovich: *The significance of Euler's research in ballistics*, pp. 241-244 in Euler and Modern Science, MAA 2007. Dies ist eine englische Übersetzung des russischen Originaltextes von 1988
- [34] McCoy, Robert L.: *Modern exterior ballistics. The launch and flight dynamics of symmetric projectiles*, Schiffer Publishing, Ltd.; 2nd edition edition, pp. 328, (May 28, 2012) Das heutige Standardwerk über äußere BALLISTIK
- [35] Magnus, G.: *Über die Abweichung der Geschosse und über eine auffallende Erscheinung bei rotierenden Körpern*, Annalen der Physik und Chemie, Band **28**, S. 1 -28, Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1853
- [36] Moore, William: A Journal of Natural Philosophy, Chemistry and the Arts **XXVII**, December 1810, Article IV: *On the Motion of Rockets both in Nonresisting and Resisting Mediums .* , page 276, London, 1810

- [37] Moore, William: [Treatise of the Motion of Rockets](#): to which is added, an essay of Naval Gunnery in Theory and Practice. London, printed for G. and S. Robinson, Paternoster-Row. 1813
- [38] [Apollo Atmospheric Entry Phases - 1968 NASA Educational Documentary](#);
- [39] Napoleon. *Napoleon inconnu*. Papiers inedits (1786-1793). Edited by Frederic Masson et Guido Biagi; Paul Ollendorff, Editeur, pp. 558, 1895
- [40] Oberth, Hermann: *Die Rakete zu den Planetenräumen*. Mit Tafeln und 58 Textabbildungen. München und Berlin 1923. Druck und Verlag von R. Oldenbourg.
- [41] Oberth, Hermann: *Wege zur Raumschiffahrt*. 431 Seiten und und 159 Textabbildungen. München und Berlin 1929. Druck und Verlag von R. Oldenbourg. Englischer Nachdruck [Ways to Spaceflight](#), NASA TT-F-622, (1970). In diesem umfangreichen Werk - eigentlich die stark erweiterte dritte Auflage des Buches von 1923 - beschreibt HERMANN OBERTH auch die optimale Aufstiegsbahn einer Rakete als Raketenlinie und Synergiebahn, wobei auch die Erdrotation energetisch ausgenutzt wird.
- [42] Parker, G.W.: *Projectile motion with air resistance quadratic in the speed*. Am. J. Phys. **45** (7), pp. 606-610, (1977)
- [43] Poisson, A.S.: *Recherches sur le mouvement des projectiles dans l'air* (Paris 1839)
- [44] Rayleigh, J.W.S.: *On the irregular flight of a tennis ball*, Messenger of Mathematics **VII**, 14 - 16, (1877); Scientific Papers, **I**, 344 (1869-1881)
- [45] Robins, Benjamin: [New principles of gunnery](#): containing the determination of the force of gun-powder, and an investigation of the difference in the resisting power of the air to swift and slow motions, with several other tracts on the improvement of practical gunnery / by Benjamin Robins ... with an account of his life and writings by James Wilson, London: F. Wingrave, 1805. New ed. / corrected, and enlarged with the addition of several notes, by Charles Hutton.

London 1742 Robins (1707 - 1751) hat auch schon den sogenannten „*Magnus-effekt*“ bei rotierenden Kanonenkugeln beschrieben. Im damals britisch besetzten Indien machte er auch erste „Erfahrungen“ mit Raketenballistik.

- [46] Rohde, Johann Philipp von: [Mathematische Abhandlungen: I. Ueber das ballistische Problem. II. Ueber die Änderungen der Elemente, der Planeten - und Cometenbahnen, in einem widerstehenden Mittel.](#) Potsdam, bei Carl Christian Horvarth 1797. Johann Philipp von Rohde (1759 - 1834) studierte in Göttingen bei KÄSTNER und LICHTENBERG und trat dann frühzeitig in die preußische Armee ein. Er unterrichtete mit CHRISTIAN VON MASSENBACH (1758-1827) an der Ingenieurakademie in Potsdam und stieg bis zum Generalmajor auf. Wissenschaftlich beschäftigte er sich mit unterschiedlichen Aufgabenstellungen zur Mathematik, Astronomie, Physik und Geophysik, die damals nicht unbedingt im Zentrum der akademischen Forschung standen. So sind seine Bemerkungen zu langfristigen Klimaänderungen aufgrund von Bahnänderungen und Achsenverschiebungen der Erde seiner Zeit weit voraus (Jahreszeiten von höherer Ordnung (Königsberg 1809)).
- [47] Ruppe, H.O.: *Introduction to Astronautics.* Academic Press, New York & London, 2 Volumes, 1966-1967 Das Standardwerk zu theoretischen Aspekten der Raumfahrt von H.O. Ruppe (1929-2016) aus den 1960er Jahren enthält auch den Versuch, die ballistische Aufstiegsbahn einer Rakete durch Reihenentwicklungen nach der Zeit zu lösen.
- [48] Scharnhorst, G. von: *Über die Wirkung des Feuegewehrs.* Für die Königlich preussischen Kriegs - Schulen, Berlin - Nauck, 1813
- [49] Seydell, C.F. 1811: *Abhandlung über Einrichtung und Gebrauch des kleinen Gewehrs.* Berlin 1811, in der Voßischen Buchhandlung.
- [50] Shouryya, Ray & Jochen Fröhlich : *An analytic solution to the equations of the motion of a point mass with quadratic resistance and generalizations.* arXiv:1305.1283v5 (2014)
- [51] Siacci, F.: *Corso di Balistica.* 3 vol., Torino 1888
- [52] Siemienowicz, Kazimierz: *Artis magnae artilleriae pars prima* Amsterdam: Jan Jansson, 1650. *Vollkomme Geschütz-Feuerwerch-und Buchsenmeisteren-Kunst*, Frankfurt am Main: In Verlegung Johann David Zunner, gedruckt bey Henrich Friessen, 1676., *The great art of artillery of Casimir Siemienowicz*, London: J. Tonson, 1729.

- [53] Steele, Brett D.: [Muskets and Pendulums: Benjamin Robins, Leonard Euler, and the Ballistics Revolution](#). *Technology and Culture* **35**, No.2 April 1994, pp. 348-382
- [54] Struensee, Carl August: [Anfangsgründe der Artillerie](#), Leipzig und Liegnitz, zweite Auflage, 1769, Im Verlage der David Siegertischen Buchhandlung, 563 Seiten. Carl August Struensee (1735 - 1804) war zuletzt preußischer Finanzminister und Mitglied der geheimen Berliner Mittwochsgesellschaft, die von 1783 - 1798 existierte und sich der Spätaufklärung verpflichtet sah.
- [55] Szabo, Istvan (1906 - 1980): *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, Birkhäuser, Basel, 1977, 1979, ISBN 3-7643-1735-3, 3. erweiterte Auflage herausgegeben von Peter Zimmermann, Emil Fellmann, 1987 (mit Biographie und Publikationsverzeichnis von Szabo).
- [56] Tait, P.G. (1890): Some Points in the Physics of Golf. *Nature* **42**, 420-423 (1890)
- [57] Tait, P.G. (1896): [Scientific Papers Vol. II](#). Cambridge at the University Press (1900)
- [58] Tartaglia, Niccolo: [La nova scientia de Nicolo Tartaglia : con una giunta al terzo libro](#), 1537
- [59] Tartaglia, Niccolo: [Quesiti et inventioni diverse](#), 1546
- [60] Tempelhoff, Georg Friedrich von, 1781: [Le Bombadier Prussien ou du Mouvement des projectiles en supposant la résistance de l'air proportionnelle au carré des vitesses](#). Berlin 1781, Friedrich der Große stellte 1781 dieses Buch unter militärische Geheimhaltung. Sehr geheim kann es aber nicht gewesen sein, denn 1796 berichtet F.X. VON ZACH in einer Rezension über ein Buch des Mathematikers J. HENNERT über seinen Inhalt, als ob er es flüchtig eingesehen hätte.
- [61] Torricelli, Evangelistae, 1644: *Opera Geometrica*
- [62] Ufano, 1613: *Tratado de la Artilleria y uso de la platicada por el capitan Diego Ufano en las Guerras de flandes*. 1613

- [63] Vega, Georg Freiherr von, (Slowenisch: JURIJ VEGA), 1787: *Praktische Anweisung zum Bombenwerfen mittels dazu eingerichteter Hilfstafeln*. Ein Fragment aus dem dritten Bande der mathematischen Vorlesungen des Artilleriehauptmanns und Professors der Mathematik bei dem kaiserlich königlichen Bombardierkorps. Wien, 1787. Der Freiherr von Vega (1754 - 1802) ist bis heute durch seine Logarithmentafeln berühmt geblieben, sowohl die Siebenstellige als auch die Zehnstellige. Die Erstere war eigentlich nur zur Berechnung von ballistischen Kurven angelegt worden. Der Schriftsteller Arno Schmidt nimmt in seinem Werk vielfältig Bezug auf Vega, dem er sich als mathematisch Interessierter und Artilleriesoldat im 2. Weltkrieg besonders verbunden fühlte.
- [64] Yabushita, K., Yamashita, M. & K. Tsuboi 2007: *An analytical solution of projectile motion with quadratic resistance law using the homotopy analysis method*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **40**, N. 29, 8403
- [65] Jaroshevskij, V.A. 1964: *Priblizhennyj raschet traektorii vhoda v atmosferu* [Approximate calculation of the atmospheric reentry trajectory]. P. I, II . Cosmic research **2**, Issue 4, Issue 5, 1964.
- [66] Jaroshevskij, V.A. 1988: *Vkhod v atmosferu kosmicheskikh letatel'nykh apparatov* (Spacecraft Atmosphere Re-Entry), Moscow: nauka, 1988.
- [67] Zach, Franz Xaver von, 1796: Rezension über das Buch von J.F. HENNERT: *Dissertations sur la fortification permanente, la fortification de campagne, et la portee des Bombes. Avec un Plan d'instruction pour les officiers*. , Utrecht: Wild & Altheer. Erschienen in *Allgemeine Literatur - Zeitung*, Band **4**, Numero 373 - 374, Spalten 521 - 534, 1796